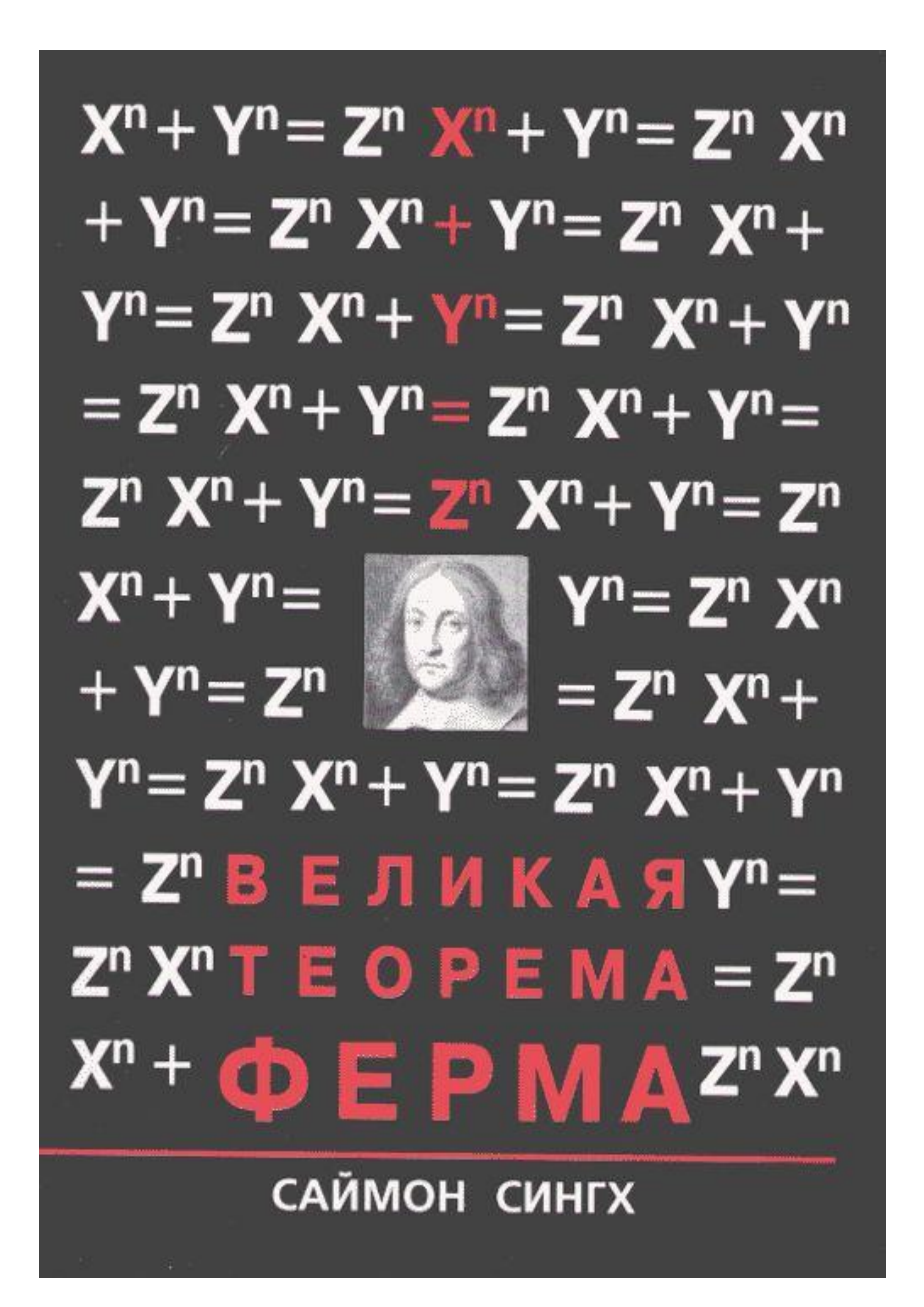


Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: МЦНМО, 2000. – 228 с.

Саймон СИНГХ
ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

От издательства

Трудно найти более известное математическое утверждение, чем последняя теорема Ферма. Своей обманчивой простотой она привлекала внимание к себе на протяжении более чем 350 лет.

И вот, наконец, теорема Ферма доказана. История ее доказательства только за последние двадцать лет уже заслуживает отдельного описания: связь с гипотезой Таниямы, объявление о доказательстве Мияоки, газетная шумиха и последующее разочарование в 1993 году, и, наконец, заявления об окончательном доказательстве и публикации в 1995 году. Учитывая ажиотаж, возникший после объявления премии в 1908 году и не утихший до сих пор, трудно поверить, что в этой интригующей истории поставлена последняя точка…

И тем не менее, перед нами книга, в которой подробно прослежена вся история доказательства от появления самой проблемы на полях «Арифметики» Диофанта в 1637 году до публикаций Э. Уайлса и Р. Тейлора в 1995 году. Столь длинный временной промежуток позволил автору сообщить множество интересных и малоизвестных подробностей из истории математики.

Эта книга была опубликована в 1997 году и стала бестселлером. Ее автору удалось успешно разрешить трудную дилемму: написать подробный и интересный рассказ о доказательстве математической теоремы, практически не используя математический аппарат. Конечно же, это стало возможным только при помощи целого ряда чрезмерных упрощений. Характерной особенностью книги является и то, что она написана, как это и отражено в предисловии, по «горячим» следам событий. К сожалению, это привело к появлению некоторых неточностей, а иногда и прямых ошибок. Тем не менее, мы уверены, что публикация этой книги на русском языке вызовет большой интерес.

В заключение нам хотелось бы привести несколько ссылок. Так, оригинальные исследования Ферма можно найти в [1]. Классические результаты можно найти в [2,3]. О связи эллиптических кривых и теоремы Ферма см. [4].

В качестве первоначальных книг по теории чисел, эллиптическим функциям и модулярным формам мы рекомендуем [4,5,6,7].

1. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. — М.: Наука, 1992.

2. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. — М.: Мир, 1980.

3. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. — М.: Наука, 1982.

4. Прасолов В.В., Соловьев Ю. П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. — М.: Факториал, 1997.

5. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

6. Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. — М.: Мир, 1988.

7. Айерланд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.

Предисловие

Наконец-то мы сошлись в одно и то же время, и в одном и том же месте — в зале, заполненного не до отказа, но все же настолько просторном, чтобы вместить сотрудников математического факультета Принстонского университета, где они собирались по какому-нибудь торжественному поводу. В тот день людей в зале было не так уж и много, но все же достаточно для того, чтобы я не мог с уверенностью сказать, кто из них Эндрю Уайлс. Оглядевшись, я через несколько минут обратил внимание на скромного вида человека, который, пил чай, слушал, о чем говорили стоявшие поблизости коллеги, и был явно погружен в ритуальный процесс «собирания с мыслями», которым около четырех часов дня поглощены математики во всем мире. Что же касается его, то он просто догадался, кто я.

Дело было в конце необычайно напряженной недели. Мне удалось встретиться с несколькими замечательнейшими математиками из числа ныне здравствующих, и мало-помалу я начал разбираться в их мире. Но несмотря на все усилия поймать Эндрю Уайлса, мы увидели друг друга впервые. Я хотел поговорить с ним и убедить его принять участие в документальном фильме, для передачи «Горизонт» на Би-Би-Си, о полученном им феноменальном результате. Эндрю Уайлс был тем самым человеком, который недавно во всеуслышание заявил что ему удалось найти Святой Грааль математики — доказательство Великой теоремы Ферма. Во время последовавшего затем разговора Уайлс был рассеян и держался замкнуто, и хотя он был вежлив и дружелюбен, было ясно, что ему очень хочется побыстрее отделаться от меня. Уайлс без обиняков заявил, что не может сейчас сосредоточиться ни на чем, кроме работы, которая, по его словам, находится в критической стадии, и что, возможно, позднее, когда схлынет напряжение, он с удовольствием примет участие в фильме.

Мне было известно (и он это знал), что самая честолюбивая мечта его жизни рухнула. Святой Грааль, который он уже было держал в руках, на деле оказался не более чем очень красивым, драгоценным, но все-таки обыкновенным сосудом для питья. Дело в том, что в своем доказательстве, о котором он возвестил математическому миру, Уайлс нашел ошибку.

История Великой теоремы Ферма уникальна. К тому времени, когда мне впервые довелось встретиться с Эндрю Уайлсом, я уже пришел к пониманию того, что это — поистине одна из величайших историй в сфере научной деятельности. Я видел своими глазами заголовки летом 1993 года, когда доказательство теоремы Ферма вынесло математику на передние полосы национальных газет всего мира. К тому времени у меня в голове сохранились лишь весьма смутные воспоминания о том, что такое Великая теорема Ферма, но было очевидно, что это нечто весьма и весьма особенное и что в передаче «Горизонт» ей стоит посвятить фильм. На протяжении нескольких недель я побеседовал со многими математиками: теми, кто принимал непосредственное участие в истории или хорошо знал Эндрю, и теми, кто просто испытывал восторг от сознания того, что им довелось стать свидетелями великого события в своей профессиональной области. Все щедро делились со мной своими познаниями из истории математики и терпеливо втолковывали мне суть свершившегося, хотя в обрушившихся на меня понятиях я разбирался весьма слабо. Вскоре стало ясно, что речь идет о предмете, которым во всей его полноте владеет едва ли полдюжины людей во всем мире. Какое-то время я даже стал задумываться над тем, не сошел ли я с ума, пытаясь снять фильм о решении теоремы Ферма. Но от своих собеседников я также узнал о богатой истории этой проблемы и большом значении Великой теоремы Ферма для математики и ее приложений и понял, что именно здесь и кроется подлинный сюжет фильма.

Я узнал, что своими корнями Великая теорема Ферма уходит в Древнюю Грецию и что в теории чисел она высится, подобно гималайскому пику. Я ощутил эстетическую привлекательность математики и начал ценить в ней то, что позволяет считать эту науку языком природы. Коллеги Уайлса помогли мне постичь титаничность его усилий по

собиранию всех наиболее современных методов теории чисел с целью последующего использования их для доказательства Великой теоремы Ферма. От друзей Эндрю в Принстоне я услышал о тернистом пути к успеху, пройденном Эндрю за годы исследований, проведенных в одиночестве. Вокруг Эндрю Уайлса мне удалось нарисовать поистине удивительную картину и шаг за шагом сложить головоломку, доминировавшую над его жизнью, но, казалось, мне так и не суждено встретить этого человека.

Хотя Уайлс использует в своем доказательстве сложнейшие математические методы, я обнаружил, что красота Великой теоремы Ферма заключается в том, что уяснить саму проблему необычайно просто. Это — головоломка, формулируемая так, что она понятна любому школьнику. Пьер де Ферма был человеком, воспитанным в традициях Возрождения, и находившимся в самом центре повторного открытия древнегреческого знания. Но Ферма сумел поставить вопрос, который не додумались задать древние греки, и в результате он стал автором труднейшей проблемы на Земле, решать которую пришлось другим. Словно дразня потомков ложными надеждами, Ферма оставил им краткое сообщение, в котором уведомлял о том, что знает решение, но умалчивал о том, в чем именно оно состоит. Так началась гонка, которая продолжалась три столетия.

То, что теорема Ферма не была доказана так долго, придает ей особую значимость. Трудно привести еще какую-нибудь проблему из любой области науки, которая была бы сформулирована столь просто и ясно и выдержала бы проверку все прогрессирующего знания на протяжении столь большого промежутка времени. Вспомним гигантские успехи, достигнутые в развитии физики, химии, медицины и инженерного дела с XVIII века. От «гуморов» в медицине мы поднялись до расщепления гена на составные части, открыли элементарные частицы из которых состоит атом, высадили людей на Луну, но в теории чисел Великая теорема Ферма продолжала оставаться неприступной крепостью.

Проводя свои изыскания, я хотел понять, почему Великая теорема Ферма так существенна (и не только для математиков) и почему так важно создать фильм о ней. Математика имеет множество практических приложений. В случае теории чисел, самые интересные из них, на мой взгляд, встречаются в криптографии, проектировании глушителей акустических сигналов и задачах связи с космическими кораблями, находящимися на большом удалении. Ни одно из этих приложений, насколько можно судить, не может быть особенно привлекательным для широкой аудитории. Гораздо более привлекательными были сами математики, и та горячность, с которой они говорили о проблеме Ферма.

Математика — одна из наиболее чистых форм мышления, и для посторонних математики могут показаться людьми не от мира сего. Во всех моих беседах с математиками меня поражала необычайная точность, с которой они выражали свои мысли. На сложный вопрос ответ приходилось ждать, пока точная структура не вырисовывалась со всей четкостью в уме математика, но зато потом следовал такой ясный и четкий ответ, о каком я мог только мечтать. Когда я спросил об этом Питера Сарнака, приятеля Эндрю, он объяснил мне, что математики просто терпеть не могут высказывать ложные утверждения. Разумеется, они используют интуицию и не чужды вдохновения, но формальные суждения должны быть логически безупречными. Доказательство лежит в самом сердце математики, и это то, что отличает математику от других наук. В других науках имеются гипотезы, проверяемые на экспериментальных данных и в конце концов отвергаемые и заменяемые новыми гипотезами. В математике целью является логически безупречное, абсолютное, доказательство, и то, что доказано, доказано на вечные времена — для каких-либо изменений не остается места. Великая теорема Ферма стала величайшим вызовом математикам, и тот, кто сумел бы решить проблему Ферма, заслужил бы восторженное поклонение всего математического сообщества.

За ее доказательство предлагались призы; процветало соперничество. У Великой теоремы Ферма богатая история, знавшая смерть и мошенничество. Она оказала определенное влияние на развитие математики. По словам профессора математики Гарвардского университета Барри Мазура, Ферма вдохнул жизнь в те разделы математики,

которые были связаны с первыми попытками доказать Великую теорему. По иронии судьбы, оказалось, что один из именно таких разделов математики занял центральное место в окончательном варианте доказательства Уайлса.

Постепенно проникаясь пониманием незнакомой мне ранее области, я пришел к заключению, что Великая теорема Ферма сыграла главную роль в развитии математики и что ее история шла параллельно истории самой математики. Ферма стал отцом современной теории чисел. С того времени, когда он жил и работал, математика обрела новую жизнь, стала развиваться и разделилась на множество областей, в рамках которых новые методы способствовали возникновению новых результатов или прекратили свое развитие, исчерпав проблематику. По прошествии веков Великая теорема Ферма, казалось, все больше отходила от переднего края математических исследований, все более превращаясь в курьез. Но как теперь стало ясно, она не утратила своего центрального места в математике.

Проблемы, связанные с числами, — вроде той, которую сформулировал Ферма, — служат своего рода испытательным полигонами для разгадывания головоломок, а математики очень любят разгадывать головоломки. Для Эндрю Уайлса Великая теорема Ферма стала головоломкой особого рода: решить ее стало мечтой всей его жизни. Тридцать лет назад, когда он еще был мальчишкой, Великая теорема Ферма поразила его воображение и навсегда запала в сердце. Летом 1993 года ему удалось найти ее доказательство в результате семилетней самоотверженной работы над проблемой, потребовавшей от него такой сосредоточенности и решимости, какие трудно себе представить. Многие из использованных им методов еще не были созданы, когда он приступил к работе. Он слил воедино труды многих превосходных математиков, установил взаимосвязи между различными идеями и разработал новые понятия, о которых другие математики боялись даже думать. В каком-то смысле, как сказал Барри Мазур, оказалось, что все размышляли над проблемой Ферма, но размышляли порознь, не помышляя о том, чтобы найти ее решение, потому что доказательство Великой теоремы Ферма потребовало бы всей мощи современной математики. То что сделал Эндрю, сводилось к восстановлению связей между разделами математики, казалось, разошедшимися навсегда. Его работа поэтому стала своего рода оправданием всей диверсификации, которую претерпела математика с тех пор, как была сформулирована проблема Ферма.

История Великой теоремы Ферма завершилась самым эффективным образом. Для Эндрю Уайлса найденное им доказательство означало конец изоляции, почти чуждой математике, которая обычно представляет собой коллективную деятельность. В нарушение всех традиций Уайлс хранил молчание о своей работе вплоть до ее заключительной стадии. И его молчание служило мерой значительности Великой теоремы Ферма. Уайлс был движим реальной страстью — желанием во что бы то ни стало стать тем, кто решит проблему Ферма, страстью столь сильной, что она заставила Уайлса посвятить семь лет своей жизни осуществлению своего намерения и следовать достижению поставленной цели. Уайлс превосходно знал, что сколько малозначительной ни считали проблему Ферма его коллеги-математики, накал состязания за решение этой проблемы не ослабевал, и поэтому Уайлс не мог рискнуть, заявив во всеуслышание о том, что он пытается найти доказательство Великой теоремы Ферма.

Проведя долгие недели за изучением того, что происходит в математике, я прибыл в Принстон. Для математиков накал эмоций был очень высок. Мне открывалась история соперничества, успеха, одиночества, гения, триумфа, ревности, жестокого прессинга, утрат и даже трагедии. В центре гипотезы Шимуры-Таниямы, сыгравшей решающую роль в решении Великой теоремы Ферма, была трагическая послевоенная жизнь в Японии Ютаки Таниямы, историю которого я имел честь выслушать от его близкого друга Горо Шимуры. От Шимуры я узнал также о понятии «доброкачественности» в математике, где все хорошо оттого, что все отличного качества. Каким-то образом ощущение доброкачественности в то лето пронизывало атмосферу математики. Все наслаждались знаменательным моментом.

Учитывая все сказанное, не приходится удивляться тому грузу ответственности,

который ощутил Эндрю, когда осенью 1993 года стало ясно, что в его доказательстве допущена ошибка. Взоры всего мира были обращены на него, коллеги призывали его опубликовать подробное доказательство, в том или в ином виде (только он один знал, в каком именно виде), но главное было в том, что строгого доказательства у него не было! Роковой переход от занятий математикой в домашней обстановке и продвижения в собственном темпе к работе на публике был совершен. Эндрю человек глубоко домашний, и он изо всех сил боролся за то, чтобы оградить свою семью от разразившейся вокруг него бури. Всю неделю, которую мне довелось провести в Принстоне, я звонил, оставлял записки в офисе, у дверей его квартиры, передавал через его друзей… Но Уайлс упорно сопротивлялся всем моим «подходам» пока у меня не остался один-единственный шанс повидаться с ним в день моего отъезда. Последовала тихая насыщенная беседа, которая продлилась всего-навсего пятнадцать минут.

Тем не менее, когда мы расстались в тот день, между нами царило понимание. Если Уайлсу удается исправить доказательство, то он непременно найдет меня, и мы обсудим замысел фильма. Я приготовился ждать. Но когда я вечером летел домой в Лондон, мне казалось, что телевизионная передача погибла, так и не успев родиться. За триста лет еще никому не удалось заштопать прорехи, обнаруженные в многочисленных попытках найти доказательство Великой теоремы Ферма. История усеяна ложными заявлениями «ферматистов», которым якобы удалось доказать Великую теорему Ферма. Я от души желал, чтобы Эндрю стал исключением, но отчетливо понимал, что его имя скорее всего окажется на одном из надгробий математического кладбища.

Год спустя мне позвонили. Совершив необычайный поворот в математических рассуждениях, в порыве вдохновения постигнув истину, Эндрю наконец завершил доказательство Великой теоремы Ферма. К тому времени я успел пригласить Саймона Сингха принять участие в создании фильма, и мы оба стали проводить время с Эндрю, слушая от самого автора доказательства подробную историю семи лет исследований в одиночестве и последовавшего затем годичного ада. Когда мы снимали фильм, Эндрю поведал нам то, о чем он не говорил никому прежде: о своих сокровеннейших мыслях по поводу того, что ему удалось совершить; о детской мечте, довлевшей над ним на протяжении тридцати лет; о том, сколько разделов математики ему пришлось изучить, не зная еще, что он занимается сбором орудий для решения Великой проблемы, игравшей главенствующую роль во всей его математической карьере; о том, что ничего подобного больше с ним не произойдет; об охватившем его чувстве потери проблемы Ферма, которая более уже не будет его постоянным компаньоном; о чувстве душевного подъема, которое охватывает его при мысли о том, что он совершил. Для Эндрю доказательство Великой теоремы Ферма было завершением одной из глав его жизни, мне же выпала высокая честь прикоснуться к столь знаменательному событию.

Наш фильм был показан по телевидению Би-Би-Си в программе «Горизонт» под названием «Великая теорема Ферма». Саймон Сингх развил то, что нам удалось понять из доверительных бесед с Эндрю Уайлсом, и насытил материал фактами из богатой истории доказательства этой теоремы. Так появилась на свет эта книга, представляющая собой полную и общедоступную письменную версию одного из величайших событий в истории человеческой мысли.

Март 1997 г.

Джон Линч

Редактор серии «Горизонт» телевидения Би-Би-Си

Введение

История Великой теоремы Ферма неразрывно связана с историей математики, так как затрагивает все основные темы теории чисел. Она открывает уникальную возможность понять, что движет математикой и что дает вдохновение математикам, — а это, возможно,

даже более важно. Великая теорема Ферма составляет центральное ядро захватывающей истории о смелости, мошенничестве, хитрости и трагедии, — истории, которая так или иначе затрагивает всех величайших героев математики.

Своими корнями Великая теорема Ферма уходит в математику Древней Греции — за две тысячи лет до того, как Пьер де Ферма сформулировал свою проблему в том виде, в каком мы знаем ее сегодня. Таким образом, Великая теорема Ферма связывает основания математики, заложенные Пифагором, с наиболее изощренными идеями современной математики. При написании этой книги я опирался на хронологическую последовательность событий, начиная с революционного эпоса пифагорейского братства и заканчивая личной историей Эндрю Уайлса — его упорной борьбы за то, чтобы найти решение головоломки Ферма.

Глава 1 повествует о Пифагоре и объясняет, почему теорему Пифагора можно считать прямым предком Великой теоремы Ферма. В этой же главе обсуждаются фундаментальные понятия математики, встречающиеся в этой книги. В главе 2 излагается история от Древней Греции до Франции XVIII века, когда Пьер де Ферма создал самую глубокую в истории математики задачу-головоломку. Несколько страниц посвящено описанию жизни Ферма и обсуждению его некоторых других блестящих открытий. Это поможет лучше понять необычный характер Ферма и его вклад в математику (далеко выходящий за рамки Великой теоремы, носящей ныне его имя).

Главы 3 и 4 описывают попытки доказать Великую теорему Ферма, предпринятые в XVIII, XIX и начале XX века. Хотя эти попытки окончились неудачей, они привели к созданию поразительного арсенала математических методов и средств. Некоторые из этих методов были использованы в ряде самых последних попыток доказать Великую теорему Ферма. Кроме того, в этих главах читатель найдет сведения о многих математиках, чье творчество в той или иной степени было связаны с наследием Ферма.

Остальные главы книги содержат хронику замечательных событий последних сорока лет, в течение которых в исследовании Великой теоремы Ферма произошел переворот. В частности, в главах 7 и 8 основное внимание уделено работе Эндрю Уайлса, чей героический прорыв, совершенный в последнее десятилетие, поразил математическое сообщество. В основу этих заключительных глав положены обширные интервью с Эндрю Уайлсом. Для меня они стали единственной в своем роде возможностью услышать от непосредственного участника событий о самом необычном приключении XX века. И я надеюсь, что мне удалось передать то творческое горение и героизм, которые потребовались Уайлсу, чтобы с честью выдержать суровые испытания, длившиеся целое десятилетие.

Рассказывая легенду о Пьере де Ферма и придуманной им поразительной задаче, я пытался объяснять математические понятия не прибегая к уравнениям, но x, y и z время от времени неизбежно поднимали свои головы. Всякий раз, когда уравнения все же появляются в тексте, они снабжены достаточными пояснениями и не вызовут трудностей у читателей, не обладающих математической подготовкой. Для тех же читателей, чьи познания в математике глубже, я привожу несколько приложений, в которых затрагиваемые в основном тексте математические идеи излагаются более подробно. Кроме того, в конце книги приведен список литературы для дальнейшего чтения. Как правило, в него вошли книги, из которых читатель-нематематик может на доступном для себя уровне получить представление о том или ином разделе математики.

Создание книги было бы невозможно без помощи и участия многих людей. Особенно я хочу поблагодарить Эндрю Уайлса, который, вопреки обыкновению, давал продолжительные и подробные интервью в самый разгар работы над решением проблемы Ферма. За семь лет работы на поприще научной журналистики я не встречал никого, кто был бы так глубоко предан своей работе, и я навсегда сохраню благодарность профессору Уайлсу за его готовность поведать мне свою историю.

Я хочу также поблагодарить других математиков, которые помогли мне написать эту книгу и любезно согласились дать мне подробные интервью. Одни из моих собеседников

сами принимали участие в попытках найти доказательство Великой теоремы Ферма, другие были свидетелями исторических событий, происшедших за последние сорок лет. Часы, которые я провел, беседуя и обмениваясь с ними шутливыми замечаниями, доставили мне необычайную радость, и я высоко ценю то терпение и энтузиазм, с которыми они объясняли мне суть многих прекраснейших математических понятий.

Я хотел бы особенно поблагодарить Джона Коутса, Джона Конвея, Ника Каца, Барри Мазура, Кена Рибета, Питера Сарнака, Горо Шимуру и Ричарда Тейлора.

Свою книгу я стремился проиллюстрировать как можно большим числом портретов, чтобы читатель составил лучшее представление о тех, кто принял участие в истории Великой теоремы Ферма. Различные библиотеки и архивы сделали все возможное, что было в их силах, чтобы помочь мне. Я хочу выразить особую благодарность Сьюзен Оукес из Лондонского математического общества, Сандре Камминг из Королевского общества и Яну Стюарту из Варвикского университета. Я признателен также Жаклин Савани из Принстонского университета, Дункану Макагнусу, Джереми Грею Полу Балистеру из Института сэра Исаака Ньютона за их помощь в подборе исследовательского материала. Я благодарен Патрику Уолшу, Кристоферу Поттеру, Бернадетте Альвес, Санджиде О'Коннел и моим родителям за их комментарии и поддержку, оказанную мне в последний год.

Наконец, многие интервью, которые упоминаются в книге, были получены, когда я работал над документальной частью телевизионного фильма о Великой теореме Ферма. Я хочу поблагодарить Би-Би-Си, позволившую мне воспользоваться этим материалом и в особенности Джона Линча, который работал вместе со мной над этим фильмом и способствовал пробуждению моего интереса к Великой теореме Ферма.

Март 1997 г.

Памяти Пакхара Сингха

Глава 1. «Думаю, мне следует остановиться»

Архимеда будут помнить, когда Эсхила забудут, потому что языки умирают, но не математические идеи. Возможно, бессмертие — глупое слово, но, по всей видимости, математик имеет наилучший шанс на бессмертие, что бы оно ни означало.

Г.Г. Харди

Кембридж, 23 июня 1993 года

Это была самая важная лекция по математике столетия. Двести математиков сидели, как завороженные. Лишь четверть из них полностью понимала густую мешанину из греческих букв и алгебраических символов, которая покрывала доску. Остальные присутствовали только для того, чтобы стать очевидцами события, которое, как они надеялись, станет поистине историческим.

Слухи поползли накануне. По электронной почте распространилось сообщение, в котором высказывалось предположение, что намеченная на 23 июня 1993 года лекция может стать кульминацией в поисках доказательства Великой теоремы Ферма — самой знаменитой математической проблемы. Такого рода слух не был чем-то необычным. Великая теорема Ферма часто бывала темой разговоров за чашкой чая, и математики принимались рассуждать о том, кто мог бы найти доказательство. Иногда смутные беседы математиков в помещении для членов колледжей превращали догадки в слухи о якобы найденном доказательстве Великой теоремы Ферма, но из этих слухов никогда ничего не материализовалось.

На этот раз слух был иного рода. Один из аспирантов Кембриджского университета был настолько убежден в истинности сообщения, что решился поставить у букмекеров

10 фунтов стерлингов на то, что доказательство Великой теоремы Ферма будет найдено в течение недели. Но букмекеры сочли, что дело нечисто, и отказались принять заклад. Это был пятый студент, который обратился к ним с аналогичным предложением в тот день. Над поиском доказательства Великой теоремы Ферма лучшие умы бились на протяжении трех столетий, и теперь даже букмекеры начали подозревать, что доказательство скоро будет найдено.

Три доски оказались исписанными, и лектор сделал паузу. Текст с первой доски был стерт, и выкладки продолжились. Каждая строка вычислений становилась крохотной ступенькой, приближавшей к решению проблемы, но вот прошло тридцать минут, а лектор все еще не объявлял, что доказательство завершено. Профессора, заполнившие первые ряды, с нетерпением ожидали заключительной части лекции. Студенты, стоявшие сзади, поглядывали на преподавателей в надежде, что те подскажут, каким может оказаться окончательный «приговор». Присутствуют ли они при изложении полного доказательства Великой теоремы Ферма, или лектор излагает лишь общую схему некоего неполного рассуждения, призванного разрядить всеобщее напряженное ожидание подлинного доказательства.

Лектором был Эндрю Уайлс, сдержанный англичанин, эмигрировавший в 80-х годах в Америку и ставший профессором Принстонского университета, где он заслужил репутацию одного из наиболее одаренных математиков своего поколения. В последние годы Уайлс почти полностью исчез из ежегодного круга конференций и семинаров, и коллеги начали было думать, что Уайлс исчерпал свои возможности как математик. Выгореть дотла для молодых блестящих умов не такая уж редкость. Как заметил математик Альфред Адлер, «математическая жизнь ученого-математика коротка. После того, как ему исполнится лет 25–30, его работа редко становится продуктивнее. Если к этому возрасту мало что сделано, то и потом удается свершить не много».

«Молодые люди должны доказывать теоремы, пожилые — писать книги, — заметил Г.Г. Харди в своей книге «Апология математика». — Ни один математик не должен забывать о том, что математика в большей степени, чем какое-либо другое искусство или наука, — игра молодых людей. В качестве простого примера упомяну о том, что средний возраст избрания в Королевское общество ниже всего у математиков». Блестящий ученик самого Харди — Сриниваса Рамануджан был избран членом Королевского общества в возрасте тридцати одного года, успев совершить в более молодые годы ряд серьезных открытий. Несмотря на весьма слабое формальное образование, полученное им в родной деревне Кумбаконам в Южной Индии, Рамануджан сумел сформулировать теоремы и решить ряд проблем, не поддававшихся усилиям математиков на Западе. В математике опыт, который приходит с возрастом, менее важен, чем интуиция и смелость, свойственные юности. Когда Рамануджан представил Харди свои результаты, кембриджский профессор был настолько поражен, что предложил Рамануджану оставить работу младшего клерка в Южной Индии и переехать в Тринити-колледж, где тот мог бы общаться и взаимодействовать с некоторыми из самых выдающихся специалистов по теории чисел в мире. К сожалению, суровые зимы Восточной Англии оказались непосильным испытанием для Рамануджана. Он заболел туберкулезом и умер в возрасте тридцати трех лет.

Немало других математиков прожили столь же блестящую, но краткую жизнь в науке. В XIX веке норвежец Нильс Хенрик Абель внес свой величайший вклад в математику, когда ему исполнилось девятнадцать лет, и умер в нищете восемью годами позже также от туберкулеза. Шарль Эрмит сказал, что Абель «оставил математикам нечто такое, над чем им предстоит трудиться лет пятьсот», и не подлежит сомнению, что его открытия и поныне оказывают глубокое влияние на современную теорию чисел. Столь же одаренный современник Абеля Эварист Галуа сделал первостепенное открытие, будучи еще подростком, и умер в возрасте двадцати одного года.

Приведенные мной примеры предназначены не для того, чтобы читатель пришел к заключению, что математиков постигает кончина безвременная и трагическая. Я хочу

подчеркнуть, что свои наиболее глубокие идеи математики выдвигают в юности, и, как сказал Харди, «я не знаю случая, когда бы серьезная математическая идея была высказана человеком старше пятидесяти». Достигнув среднего возраста, математики часто отходят на задний план и проводят остаток своих дней, занимаясь преподаванием или администрированием, но не математическими исследованиями. С Эндрю Уайлсом дело обстоит совсем иначе. Хотя он достиг почтенного сорокалетнего возраста, семь лет он работал над решением задачи в обстановке полной секретности, пытаясь найти решение единственной в своем роде величайшей проблемы в истории математики. В то время, как коллеги Уайлса подозревали, что математический дар его безвозвратно иссяк, он фантастически быстро продвигался к поставленной цели, изобретая новые методы и средства, которые теперь вознамерился открыть математическому сообществу. Его решение работать над проблемой в полной изоляции было весьма рискованной стратегией, неслыханной прежде в математическом мире.

Не обладая изобретениями, требующими патентования, математический факультет любого университета сопряжен с секретностью в меньшей степени, чем любой другой факультет. Сотрудники математического факультета наслаждаются открытым свободным обменом идей, как правило во время чаепитий, которые превратились в ежедневные ритуалы. Как следствие, все большее число статей публикуется в соавторстве или группами математиков, и слава делится на всех поровну. Но если профессор Уайлс действительно обнаружил полное и строгое доказательство Великой теоремы Ферма, то наиболее высоко ценимая награда в математике принадлежит ему, и только ему одному. Цена, которую он был вынужден уплатить за то, что вел свои исследования в тайне от коллег и ранее не обсуждал свои идеи и не проверял их на математическом сообществе, заключалась в высокой вероятности, что где-то в своих рассуждениях он допустил фундаментальную ошибку.

По своему замыслу Уайлс намеревался еще какое-то время поработать над проблемой Ферма, чтобы полностью проверить окончательный вариант своей рукописи. Но ему представилась уникальная возможность объявить о своем открытии в Институте сэра Исаака Ньютона, и Уайлс отбросил осторожность. Единственная цель существования этого Института состоит в том, чтобы собирать вместе на несколько недель самые выдающиеся умы мира и предоставлять им возможность проводить по своему усмотрению семинары по самым животрепещущим проблемам современной математики. Расположенное на задворках Кембриджского университета, вдали от студентов и разных помех, институтское здание спланировано и построено с таким расчетом, чтобы создать математикам все условия, позволяющие сосредоточиться на обсуждаемой проблеме и предпринять мозговой штурм. Внутри здания нет тупиков, в которых можно было бы затаиться. Все кабинеты выходят на форум. Предполагалось, что математики в основном будут собираться на форуме. Двери кабинетов рекомендуется держать открытыми. Передвигаясь по Институту, математик может не прерывать общения с коллегами. Доска висит даже в лифте, перемещающимся между тремя этажами. И по крайней мере одна доска есть в каждой комнате, не исключая ванных. В тот раз, о котором идет речь, в Институте Ньютона семинары шли под названием «L -функции и арифметика». Все наиболее выдающиеся специалисты мира по теории чисел собрались, чтобы обсудить проблемы, связанные со столь высокоспециализированной областью чистой математики, но только Уайлс понял, что L -функции могли бы дать ключ к доказательству Великой теоремы Ферма.

И хотя его очень привлекала возможность рассказать о своей работе столь выдающейся аудитории, все же главным, что заставило его объявить о своем открытии в Институте Ньютона, было то, что он находился в своем родном городе — Кембридже. Здесь Уайлс родился, вырос, здесь получила развитие его любовь к теории чисел, и именно в Кембридже он впервые столкнулся с проблемой, которой посвятил свою оставшуюся жизнь.

Проблема Ферма

В 1963 году, когда ему было всего десять лет, Эндрю Уайлс уже был очарован математикой. «В школе я любил решать задачи, я брал их домой и из каждой задачи придумывал новые. Но лучшую из задач, которые мне когда-либо попадались, я обнаружил в местной библиотеке».

Эндрю Уайлс в возрасте десяти лет, когда он впервые узнал о Великой теореме Ферма.

Однажды по дороге из школы домой Эндрю Уайлс решил заглянуть в библиотеку на Милтон-роуд. По сравнению с библиотеками университетских колледжей эта библиотека была довольно бедной, но выбор книг по занимательной математике в ней был богатым, и эти книги часто привлекали внимание Эндрю. Их страницы были до отказа заполнены всякого рода научными курьезами и задачами-головоломками, и на каждый вопрос существовал готовый ответ, заботливо помещенный где-нибудь в конце книги. Но на этот раз Эндрю выудил книгу, в которой речь шла лишь об одной-единственной задаче, и решение ее не приводилось.

Это была книга Эрика Темпла Белла «Великая проблема» об истории одной математической задачи, корни которой уходят в Древнюю Грецию. Своего полного расцвета эта проблема достигла в XVII веке. Именно тогда великий французский математик Пьер де Ферма без всякого умысла сформулировал ее так, что она стала вызовом всему остальному миру. Выдающиеся математики один за другим принимались за наследие Ферма и были вынуждены смиренно признать, что оно оказалось им не по силам. За триста лет никому не удалось решить эту проблему. Разумеется, в математике есть немало других нерешенных проблем, но проблема Ферма занимает среди них особое место своей обманчивой простотой. Тридцать лет спустя после того, как он впервые прочитал книгу Белла, Уайлс рассказал мне, что он ощутил при первой встрече с Великой теоремой Ферма. «Она выглядела такой простой, и все же великие умы в истории математики не смогли доказать ее. Передо мной была проблема, понятная мне, десятилетнему мальчику, и я почувствовал, что с того самого момента я никогда не смогу отступиться от этой проблемы. Я должен был решить ее».

Проблема выглядела столь простой потому, что в основе ее лежало математическое утверждение, которое всем известно, — теорема Пифагора: *в любом прямоугольном треугольнике квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на катетах* .

Благодаря этому пифагорову заклинанию, теорема запечатлелась в мозгу миллионов, если не миллиардов, людей. Это — фундаментальная теорема, заучивать которую заставляют каждого школьника. Но несмотря на то, что теорема Пифагора доступна пониманию десятилетних, она является вдохновляющим началом проблемы, при решении которой потерпели фиаско величайшие умы в истории математики.

Пифагор с острова Самос был одной из наиболее влиятельных и тем не менее загадочных фигур в математике. Поскольку достоверных сообщений о его жизни и работе не сохранилось, его жизнь оказалась окутанной мифами и легендами, и историкам бывает трудно отделить факты от вымысла. Не подлежит сомнению, однако, что Пифагор развил идею о логике чисел и что именно ему мы обязаны первым золотым веком математики. Благодаря его гению, числа перестали использоваться только для счета и вычислений и были впервые оценены по достоинству. Пифагор изучал свойства определенных классов чисел, соотношения между ними и фигуры, которые образуют числа. Пифагор понял, что числа существуют независимо от материального мира, и поэтому на изучении чисел не сказывается неточность наших органов чувств. Это означало, что Пифагор обрел возможность открывать истины, независимые от чьего-либо мнения или предрассудка. Истины более абсолютные, чем любое предыдущее знание.

Пифагор жил в V веке до н. э., свои познания и умения в математике он приобрел, странствуя по Древнему Миру. По некоторым преданиям, Пифагор побывал в Индии и Британии, но, по более достоверным сведениям, он перенял многие математические методы и средства у вавилонян и египтян. И те, и другие древние народы вышли за пределы простого счета и могли выполнять сложные вычисления, позволявшие им создавать тонкие системы учета и возводить сложные здания. Правда, математику они рассматривали лишь как средство решения практических проблем; причиной открытий некоторых основных правил геометрии стала необходимость восстанавливать границы между земельными участками, оказавшимися смытыми при ежегодных разливах Нила. Само слово геометрия означает «землемерие».

Пифагор обратил внимание на то, что египтяне и вавилоняне проводили каждое вычисление по рецепту, которому можно было слепо следовать. Эти рецепты, апробированные не одним поколением, неизменно давали правильное решение, и никому и в голову не приходило усомниться в них или подвергнуть анализу логику, лежащую в их основе. Для египетской и вавилонской цивилизаций было важно, что вычисления «работают», а почему они работают, неважно.

После двадцати лет странствий Пифагор собрал и усвоил все математические правила, существовавшие в цивилизованном мире, и отплыл на родину — остров Самос в Эгейском море — с намерением основать школу, члены которой занимались бы изучением философии и в особенности исследованием собранных им математических правил. Пифагор хотел понять числа, а не только вслепую пользоваться ими. Он надеялся, что ему удастся найти достаточное количество свободно мыслящих учеников, которые помогут ему создать радикально новую философию, но за время его отсутствия тиран Поликрат превратил некогда вольный Самос в нетерпимое консервативное общество. Поликрат пригласил Пифагора ко двору, но философ понимал, что это был не более чем маневр с целью заставить его замолчать, и под благовидным предлогом отклонил предложенную честь. Пифагор покинул город и поселился в пещере, расположенной в отдаленной части острова, где он мог свободно предаваться размышлениям, не опасаясь преследований.

Пифагор был настолько одинок, что в конце концов был вынужден подкупить юношу, чтобы тот согласился стать его учеником. Кем был этот юноша, неизвестно, но некоторые историки высказывают предположение, что его также звали Пифагором и что позднее именно он прославился тем, что посоветовал атлетам есть мясо, чтобы улучшить свои спортивные результаты. Пифагор-учитель платил своему ученику по три обола за каждый урок, который тот посещал. По прошествии нескольких недель он заметил, что упорное нежелание юноши учиться превратилось в любовь к знанию. Чтобы испытать своего ученика, Пифагор сделал вид, что не в состоянии платить ему и что уроки придется прекратить. В ответ ученик предложил сам оплачивать уроки, но просил покинуть колонию.

Пифагор отправился в южную Италию, бывшую тогда частью Древней Греции, и поселился в Кротоне, где ему посчастливилось найти идеального покровителя в лице Мило, самого богатого человека в Кротоне и одного из сильнейших людей в истории. Хотя слава Пифагора как мудреца с острова Самос распространилась по всей Греции, слава Мило была еще больше. Мило был сложен, как Геркулес, и двенадцать раз завоевывал титул чемпиона Олимпийских и Пифийских игр. Помимо занятий атлетикой Мило высоко ценил философию и математику и занимался их изучением. Он предоставил Пифагору достаточно большую часть своего дома для того, чтобы тот мог основать школу. Так самый творчески мысливший разум и самое мощное тело стали партнерами.

Чувствуя себя в безопасности в своем новом доме, Пифагор основал пифагорейское братство — группу из шестисот последователей, способных не только понять его учения, но и добавить к ним новые идеи и доказательства. Вступая в братство, каждый последователь Пифагора должен был пожертвовать в общий фонд все свое состояние. Каждый, кто покидал братство, получал сумму вдвое большую, чем первоначальное пожертвование, и в память о нем воздвигалась надгробная плита. Пифагорейское братство было эгалитарной школой, и

среди учащихся были не только мужчины, но и несколько женщин. Любимой ученицей Пифагора была дочь Мило — прекрасная Теано. Несмотря на большую разницу в возрасте Пифагор и Теано в конце концов поженились.

Вскоре после основания братства Пифагор придумал слово «философ» и тем самым провозгласил цели школы. Во время Олимпийских игр Леон, правитель Флиуса, спросил Пифагора, как бы тот охарактеризовал себя. Пифагор ответил: «Я философ», но Леону не приходилось прежде слышать этого слова, и он попросил Пифагора объяснить, что оно означает.

«Жизнь, правитель Леон, можно уподобить происходящим сейчас Олимпийским играм: в собравшейся здесь огромной толпе одних привлекает выгода, которую они надеются извлечь, других — надежды и честолюбивые замыслы, они надеются обрести известность и славу. Но есть среди них немного и таких, кто пришел сюда, чтобы увидеть и понять все, что здесь происходит.

То же самое относится и к жизни. Одни обуяны любовью к благосостоянию, другие слепо следуют безумной лихорадочной жажде власти и господства, но лучший из людей посвящает себя познанию смысла и цели самой жизни. Он стремится раскрыть тайны природы. Такого человека я называю философом, ибо хотя ни один человек не может постичь всю мудрость мира, он может любить мудрость как ключ к тайнам природы».

Хотя многие знали о намерениях Пифагора, никто за пределами братства не знал, чем именно занимаются Пифагор и его ученики. Каждый член школы приносил торжественную клятву никогда, ни под каким видом, не разглашать посторонним математические открытия братства. Даже после смерти Пифагора один из членов братства был утоплен за то, что он нарушил клятву, — публично заявил об открытии нового правильного тела, додекаэдра, ограниченного двенадцатью правильными пятиугольниками. Множество мифов о странных ритуалах, совершавшихся членами братства, и немногочисленность надежных сведений об их математических достижениях — следствие той доведенной до предела таинственности, которой окружали себя пифагорейцы.

Достоверно известно, что Пифагор установил этос, изменивший ход развития математики. По существу пифагорейское братство было религиозным сообществом, и одним из идолов, которым поклонялись пифагорейцы, было Число. Пифагорейцы полагали, что постигая соотношения между числами, они смогут раскрыть духовные тайны Вселенной и тем самым приблизиться к богам. Особое внимание члены братства уделяли натуральным числам (1, 2, 3…) и дробям. Натуральные числа вместе с дробями (отношениями этих чисел) на языке профессиональных математиков принято называть рациональными числами. Среди бесконечного множества чисел пифагорейцы высматривали те, которые имеют особое значение. Среди наиболее значимых для них чисел были так называемые «совершенные» числа.

По мнению Пифагора, совершенство числа зависит от его делителей (т. е. тех чисел, которые делят без остатка исходное число). Например, делителями числа 12 являются 1, 2, 3, 4, и 6. Если сумма делителей числа больше самого числа, то такое число называется «избыточным». Например, 12 — избыточное число, так как сумма его делителей равна 16.

С другой стороны, если сумма делителей числа меньше самого числа, то такое число называется «недостаточным». Например, 10 — недостаточное число, так как сумма его делителей (1, 2 и 5) равна лишь 8.

Числа, сумма делителей которых в точности равна самому числу, пифагорейцы считали особенно важными. Такие числа они называли совершенными. Например, число 6 имеет делителями 1, 2 и 3 и, следовательно, совершенно, так как 1+2+3 = 6. Следующее совершенное число равно 28, так как

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Совершенный характер чисел 6 и 28, имевший столь большое математическое значение для пифагорейцев, был признан и другими культурами, обратившими внимание на то, что Луна совершает оборот вокруг Земли каждые 28 дней, и утверждавшими, что Бог сотворил

мир за 6 дней.

В сочинении «Град Божий» Св. Августин высказал мысль о том, что хотя Бог мог сотворить мир в одно мгновенье, Он предпочел сотворить его за 6 дней, дабы поразмыслить над совершенством мира. По мнению Св. Августина, число 6 совершенно не потому, что Бог избрал его, а потому, что совершенство внутренне присуще природе этого числа. «Число 6 совершенно само по себе, а не потому, что Господь сотворил все сущее за 6 дней; скорее наоборот, Бог сотворил все сущее за 6 дней потому, что это число совершенно. И оно оставалось бы совершенным, даже если бы не было сотворения за 6 дней».

По мере того, как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются все реже. Третье совершенное число 496, четвертое — 8 128, пятое — 33 550 336, шестое — 8 589 869 056. Пифагор заметил, что совершенные числа не только равны сумме своих делителей, но и обладают некоторыми другими изящными свойствами. Например, совершенные числа всегда равны сумме нескольких последовательных натуральных чисел. В самом деле,

6 = 1 + 2 + 3,

28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7,

496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + … + 30 + 31,

8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + … + 126 + 127.

Пифагор забавлялся совершенными числами, но не довольствовался одним лишь коллекционированием таких чисел. Он мечтал открыть их более глубокое значение. Одно из его открытий состояло в том, что совершенство чисел тесно связано с «двоичностью». Числа $4=2\cdot2$, $8=2\cdot2\cdot2$, $16=2\cdot2\cdot2\cdot2$ и т. д. называются степенями числа 2 и могут быть представлены в виде 2^n , где n означает число перемноженных двоек. Все степени числа 2 чуть-чуть «не достают» до того, чтобы стать совершенными, так как сумма их делителей всегда на единицу меньше самого числа. Иначе говоря, все степени двойки слегка недостаточны:

$2^2 = 2\cdot2 = \mathbf{4}$, делители 1, 2, сумма **3** ,

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = \mathbf{8}$, делители 1, 2, 4, сумма **7** ,

$2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = \mathbf{16}$, делители 1, 2, 4, 8, сумма **15** ,

$2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = \mathbf{32}$, делители 1, 2, 4, 8, 16, сумма **31** .

Двумя столетиями спустя Евклид уточнил замеченную Пифагором взаимосвязь между двоичностью и совершенством. Евклид открыл, что совершенные числа всегда кратны двум числам, одно из которых равно степени числа 2, а другое на единицу меньше следующей степени числа 2:

$6 = 2^1\cdot(2^2 — 1)$,

$28 = 2^2\cdot(2^3 — 1)$,

$496 = 2^4\cdot(2^5 — 1)$,

$8128 = 2^6\cdot(2^7 — 1)$.

Современные компьютеры позволили продолжить поиск совершенных чисел и обнаружить чудовищно большие экземпляры таких чисел, например, $2^{216090}\cdot(2^{216091} — 1)$. Это число содержит более 130 000 цифр и подчиняется правилу Евклида.

Пифагор восхищался разнообразием структуры и свойствами совершенных чисел и с почтением относился к их тонкости и коварству. На первый взгляд, совершенство — свойство, сравнительно простое для понимания. Тем не менее, древние греки так и не сумели постичь некоторые фундаментальные особенности совершенных чисел. Так, хотя они знали множество слегка недостаточных чисел (т. е. чисел сумма делителей которых на единицу меньше самого числа), им не удалось найти слегка избыточное число (т. е. число сумма делителей которого на единицу больше самого числа). Они не сумели также доказать, что таких чисел не существует.

Хотя никакого практического значения эта задача не имела, ее решение могло бы прояснить природу совершенных чисел, и поэтому она заслуживала изучения. Такого рода загадки интриговали пифагорейское братство, и спустя две с половиной тысячи лет математики все еще не могут доказать, что слегка избыточные числа не существуют.

Всё сущее есть число

Помимо изучения соотношений между числами Пифагора интересовала взаимосвязь между числами и природой. Он понимал, что природные явления подчиняются законам, а эти законы описываются математическими соотношениями. Одним из первых открытий Пифагора стало фундаментальное соотношение между гармонией в музыке и гармонией чисел.

Самым важным инструментом в древнегреческой музыке был тетрахорд, или четырехструнная лира. И до Пифагора музыканты ценили те ноты, которые при совместном звучании создавали приятный эффект, и настраивали свои лиры так, чтобы при пощипывании двух струн возникала гармония. Но музыканты не понимали, почему те или иные сочетания нот гармоничны, и не обладали объективной системой для настройки своих инструментов. Лиры они настраивали только по слуху, пока не устанавливалось гармоническое звучание струн, — с помощью процесса, который Платон называл пыткой настроечных колков.

Ямвлих, ученый, живший в IV веке и написавший девять книг о пифагорейском братстве, рассказывает о том, как Пифагор пришел к открытию принципов, лежащих в основе музыкальной гармонии.

«Однажды Пифагор был глубоко погружен в размышления о том, как бы изобрести механическое устройство для слуха, которое было бы надежным и незамысловатым. Такое устройство было бы подобно циркулям, линейкам и оптическим инструментам, измышленным для зрения… Божественная удача распорядилась так, что Пифагор проходил как-то раз мимо кузницы, в которой работали кузнецы, и услышал удары молотков о железо, производивших во всех комбинациях, кроме одной, разнообразные гармонические звуки».

Как рассказывает далее Ямвлих, Пифагор, сгорая от нетерпения, вбежал в кузницу, чтобы выяснить, как возникает гармония молотов. Он заметил, что большинство молотов, если ими ударить одновременно, порождают гармоническое звучание, но одна комбинация молотов всегда порождала неприятное звучание. Рассмотрев хорошенько молоты, Пифагор понял, что те, которые издавали гармоническое звучание, находились в простом математическом отношении: их массы образовывали друг с другом простые отношения, или дроби. Иначе говоря, молоты, вес которых составляет половину, две трети или три четверти веса какого-то определенного веса, порождают гармонические звучания. С другой стороны, молот, порождающий дисгармонию (если ударить им одновременно с любым из других молотов), имеет вес, не образующий простого отношения с весом любого из других молотов.

Пифагор открыл, что простые отношения чисел отвечают за гармонию в музыке. Ученые усомнились в правдивости истории, рассказанной Ямвлихом о Пифагоре. Более достоверно известно, что Пифагор применил свою новую теорию музыкальных отношений к лире, рассматривая свойства одной струны. Если просто ущипнуть струну, то возникает стандартная нота, или тон, который создается всей длиной колеблющейся струны. Зажав струну в определенных точках, можно породить другие колебания и тоны, как показано на рис. 1. Важно то, что гармонические тона возникают только при зажиме струны в определенных точках.

Например, зажав струну точно посередине и затем ущипнув ее, мы получим тон октавой выше в гармоническом созвучии с первоначальном тоном. Если струну зажать на расстоянии одной трети, четверти или пятой длины от конца, то получатся другие гармонические тона. Но стоит зажать струну в точке, отстоящей от конца на расстоянии, не образующем простую дробь с длиной струны, как издаваемый струной звук не будет гармонировать с другими тонами.

Рис. 1. Свободно колеблющаяся открытая струна издает основной тон. Если точно посредине струны создать узел колебания, то издаваемая струной нота станет на октаву

выше и будет гармонировать с исходной нотой. Другие гармоники мы получим, перемещая узел в другие положения, соответствующие простым дробям (например, трети, четвертой или пятой части) от полной длины струны

Пифагор впервые открыл математическое правило, которому подчиняется физическое явление, и показал тем самым, что между математикой и физикой существует фундаментальная взаимосвязь. Со времени этого открытия ученые стали заниматься поиском математических правил, которым, судя по всему, подчиняется каждый физический процесс в отдельности, и обнаружили, что числа возникают во всех явлениях природы.

Например, некоторое число входит в закономерность, которой подчиняются длины рек. Профессор Ханс-Хенрик Стоун, специалист по физике Земли из Кембриджского университета, вычислил отношение между истинной длиной реки от истока до устья и расстоянием «по прямой», как могла бы лететь птица. И хотя это отношение варьируется от реки к реке, его среднее значение лишь немногим больше 3, т. е. истинная длина реки примерно в 3 раза больше расстояния от источников до устья по прямой.

В действительности это отношение примерно равно 3,14, что близко к значению числа π — отношению длины окружности к ее диаметру. Число π первоначально возникло в геометрии окружностей, но появляется снова и снова при самых различных обстоятельствах во многих разделах науки.

Например, появление числа π в отношении истинной длины реки от истоков до устья к расстоянию от ее истоков до устья по прямой — результат борьбы между порядком и хаосом. Эйнштейн первым высказал предположение о том, что реки имеют тенденцию ко все более извилистому руслу, так как малейшее искривление русла приводит к ускорению течения у «наружного» берега, что в свою очередь приводит к ускорению эрозии берега и увеличению крутизны поворота. Чем круче поворот, тем быстрее течение у «наружного» берега; чем быстрее течение, тем сильнее эрозия; чем сильнее эрозия, тем круче поворот реки, и т. д.

Однако, существует в природе процесс, который укрощает хаос: увеличение извилистости русла приводит к появлению петель и, наконец, к «короткому замыканию» русла: река спрямляет русло, а замкнутая петля, оставшаяся в стороне от русла, становится старицей. Баланс между этими двумя противоположными факторами приводит к близкому к π среднему значению отношения истинной длины реки и расстоянием между истоками и устьем по прямой. Отношение равное π чаще всего встречается у рек, текущих по равнинам с очень слабым уклоном. Таковы, например, реки Бразилии и Сибири.

Пифагор понял, что всюду, от гармонии в музыке до планетных орбит, скрыты числа, и это открытие позволило ему сформулировать афоризм: «Все сущее есть Число». Постигая смысл и значение математики, Пифагор разрабатывал язык, который позволил бы и ему самому, и другим описывать природу Вселенной. С тех пор каждое существенное продвижение в математике давало ученым словарь, необходимый для лучшего объяснения явлений в окружающем мире. Не будет преувеличением сказать, что успехи математики порождали коренные сдвиги в естествознании.

Исаак Ньютон был не только открывателем закона всемирного тяготения, но и выдающимся математиком. Его величайшим вкладом в математику стало создание математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления. Позднее физики использовали язык математического анализа для более точного описания закона всемирного тяготения и решения задач, связанных с гравитацией. Созданная Ньютоном классическая теория гравитации пережила века и уступила место общей теории относительности Альберта Эйнштейна, давшего новое, более подробное объяснение гравитации. Идеи самого Эйнштейна стали возможными только благодаря новым математическим понятиям, позволившим ему развить более изощренный язык для своих более сложных (по сравнению с ньютоновскими) научных идей. Современная интерпретация гравитации также стала возможной под влиянием последних достижений математики.

Новейшие квантовые теории гравитации связаны с успехами математической теории струн, в которой геометрические и топологические свойства трубок наилучшим образом объясняют силы природы.

Из всех взаимосвязей между числами и природой, изученных членами пифагорейского братства, наиболее важным стало соотношение, которое ныне носит имя основателя братства. Теорема Пифагора дает нам соотношение, которое выполняется для всех прямоугольных треугольников и, следовательно, определяет прямой угол. В свою очередь, прямой угол определяет перпендикуляр, т. е. отношение вертикали к горизонтали, а в конечном счете — отношение между тремя измерениями нашего мира. Математика — через прямой угол — определяет самую структуру пространства, в котором мы живем. Это очень глубокая мысль.

Между тем, формулировка теоремы Пифагора сравнительно проста. Действительно, чтобы понять ее, нужно прежде всего измерить длину двух более коротких сторон (x и y), — так называемых катетов, — прямоугольного треугольника, и каждую из полученных длин возвести в квадрат (x^2 и y^2). Затем нужно сложить квадраты длин ($x^2 + y^2$). Для треугольника, изображенного на рис. 2, сумма равна 25.

$$x = 3, y = 4, z = 5$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$9 + 16 = 25$$

Рис. 2

Теперь вы можете измерить длину наибольшей стороны z — так называемой гипотенузы — и возвести полученное число в квадрат. Самое замечательное заключается в том, что число z^2 совпадает с вычисленной вами ранее суммой, т. е. $5^2 = 25$. Иначе говоря, в любом прямоугольном треугольнике квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на катетах.

Иными словами (точнее, символами), теорема Пифагора утверждает, что

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ясно, что это соотношение выполняется для треугольника на рис. 2, но суть теоремы Пифагора в том, что это равенство остается в силе для любого прямоугольного треугольника, какой вы только можете себе представить. Это — универсальный закон математики, и вы можете положиться на него всякий раз, когда вам доведется встретить треугольник, содержащий прямой угол. И обратно, стоит вам встретить треугольник, удовлетворяющий теореме Пифагора, как вы можете быть абсолютно уверенными в том, что перед вами прямоугольный треугольник.

Уместно заметить, что, хотя теорема, о которой идет речь, навсегда связана с именем Пифагора, китайцы и вавилоняне использовали ее на тысячу лет раньше. Однако ни китайские, ни вавилонские геометры не знали, что эта теорема выполняется для любого прямоугольного треугольника. Теорема, получившая впоследствии название теоремы Пифагора, оказалась верной для любого прямоугольника, на котором китайцы и вавилоняне могли ее проверить, но они не знали, как показать, что она будет справедлива для всех тех прямоугольных треугольников, которые они не подвергли проверке. Причина, по которой теорему стали называть теоремой Пифагора, заключается в том, что именно он доказал ее универсальную истинность.

Но каким образом Пифагор узнал, что его теорема верна для любого прямоугольного треугольника? Он не мог надеяться на то, что ему удастся проверить бесконечно много разнообразнейших прямоугольных треугольников, и тем не менее Пифагор сумел обрести уверенность «на все сто процентов» в том, что его теорема — абсолютная истина. Причина

его уверенности — в понятии математического доказательства. Поиск математического доказательства — это поиск знания, более точного, чем знание, накопленное какой-нибудь другой научной дисциплиной. Жажда постичь абсолютную истину с помощью метода доказательства двигала математиками на протяжении двух с половиной тысяч лет.

Абсолютное доказательство

История Великой теоремы Ферма — это история поиска недостающего доказательства. Математическое доказательство гораздо мощнее и строже, чем представление о доказательстве, которым мы пользуемся в нашем повседневном языке, и даже чем то представление о доказательстве, которого придерживаются физики или химики. Понимание различия между естественнонаучным и математическим доказательствами имеет решающее значение для осознания того, чем занимается каждый математик со времен Пифагора.

Классическое математическое доказательство начинается с серии аксиом — утверждений, которые можно предположить истинными или истинность которых самоочевидна. Затем с помощью логических рассуждений, шаг за шагом, можно прийти к заключению. Если аксиомы истинны, а логика безупречна, то заключение безупречно. Этим заключением и является теорема.

Математические теоремы опираются на такой логический процесс и, доказанные однажды, они остаются истинными до скончания веков. Математические доказательства абсолютны. Чтобы по достоинству оценить значительность абсолютных доказательств, их следует сравнить с их «бедным родственником» — естественнонаучным доказательством, принятым, например, в физике.

В физике гипотеза выдвигается для объяснения какого-нибудь физического явления. Если наблюдения за явлением хорошо согласуются с гипотезой, то это свидетельствует в ее пользу, или, как принято говорить, подкрепляет выдвинутую гипотезу. Кроме того, гипотеза должна не только описывать известные процессы, но и предсказывать исход других процессов.

Для проверки предсказательной силы гипотезы могут проводиться эксперименты, и если они оказываются успешными, то это еще сильнее подкрепляет гипотезу. В конце концов, количество данных, свидетельствующих в пользу гипотезы, может оказаться достаточно большим, и гипотезу принимают в качестве физической теории.

Однако физическая теория никогда не может быть доказана на уровне, столь же абсолютном, как тот, на котором принято доказывать математические теоремы: на основе имеющихся данных физическую теорию можно считать обоснованной лишь с большей или меньшей вероятностью. Так называемое физическое, или, более общо, естественнонаучное доказательство, основано на наблюдениях и данных, доставляемых нашими органами чувств. И те, и другие обманчивы и дают лишь приближение к истине. Как заметил Бертран Рассел: «Хотя это может показаться парадоксом, все точные науки пронизаны идеей приближения».

Даже наиболее широко признанные естественнонаучные «доказательства» неизменно содержат в себе небольшой элемент сомнения. Иногда сомнение становится меньше; но оно никогда не исчезает полностью. Иногда выясняется, что предложенное доказательство неверно. Слабость физического доказательства приводит к научным революциям, во время которых на смену одной теории, считавшейся «верной» приходит другая теория, которая может быть всего лишь уточнением прежней теории, а может полностью противоречить ей.

Например, в поиске фундаментальных частиц материи каждое поколение физиков «перепахивало» или, по крайней мере, уточняло и усовершенствовало теорию своих предшественников. Современный этап поиска мельчайших «кирпичиков», из которых построена Вселенная, начался в первые годы XIX века, когда в результате серии экспериментов Джон Дальтон пришел к гипотезе о том, что все в мире состоит из отдельных атомов и что эти атомы — мельчайшие частицы материи.

В конце XIX века Дж. Дж. Томсон открыл электрон — первую известную субатомную

частицу, и атом перестал быть мельчайшей частицей материи.

В начале XX века физики построили «полную» теорию атома: вокруг ядра, состоящего из протонов и нейронов, обращаются электроны. Протоны, нейроны и электроны были горделиво провозглашены физиками полным набором ингредиентов, из которых состоит Вселенная. Затем анализ космических лучей обнаружил существование других элементарных частиц — пионов и мюонов. Еще больший переворот в физике произошел в 1932 году, когда было открыто антивещество — существование антипротонов, антинейтронов, антиэлектронов и т. д. К тому времени физики, занимавшиеся изучением элементарных частиц, не могли с уверенностью сказать, сколько существует различных частиц, но по крайней мере утверждали, что обнаруженные частицы действительно элементарны, т. е. неделимы. Так продолжалось до 60-х годов, когда появилось понятие кварка. Протон, так же, как нейтрон, пион и мюон, оказался состоящим из кварков, несущих электрический заряд, равный дробной части заряда электрона. Мораль всей этой истории в том, что физики непрестанно меняют свою картину мира, а иногда даже стирают ее совсем и начинают рисовать с самого начала. В следующем десятилетии самое представление о частице как о точечном объекте может претерпеть замену на представление о частицах как о струнах — тех самых струнах, которые, возможно, послужат наилучшему объяснению гравитации. Согласно теории струн, трубки длиной в одну миллиардную миллиардной миллиардной миллиардной метра (такие маленькие, что они кажутся точками) могут совершать различные колебания, и каждое такое колебание порождает определенную частицу. Такое представление аналогично открытию Пифагора, обнаружившего, что одна струна лиры может порождать различные ноты в зависимости от того, как она колеблется.

Писатель-фантаст и футуролог Артур Кларк писал, что если какой-нибудь знаменитый профессор утверждает, будто нечто несомненно истинно, то весьма вероятно, что на следующий день это нечто окажется ложным. Физическое доказательство ненадежно и шатко. В то же время математическое доказательство абсолютно и лишено и тени сомненья. Пифагор умер в полной уверенности, что его теорема, бывшая истиной в 500 году до н. э., останется истинной навсегда.

Физика живет, словно подчиняясь решению суда. Теория считается верной, если имеется достаточное количество данных, «неопровержимо» подтверждающих ее предсказания. Иное дело — математика. Она не полагается на данные, полученные в результате могущих оказаться ошибочными экспериментов, а строит свои заключения на основе «железной», т. е. не знающей ошибок, логики. Примером различия между физическим и математическим подходом может служить задача о шахматной доске с выпиленными угловыми полями (рис. 3).

Рис. 3

Перед нами шахматная доска, от которой два противоположных угловых поля отпилили так, что осталось только 62 поля. Возьмем 31 кость домино таких размеров, что каждая кость накрывает ровно два шахматных поля. Вопрос: можно ли разложить 31 кость домино на шахматной доске так, что все 62 поля окажутся покрытыми домино? К решению задачи существуют два подхода.

1) Физический подход

Физик пытается решить задачу экспериментально и, перепробовав с дюжину различных вариантов размещения домино на шахматной доске обнаруживает, что все они заканчиваются неудачей.

В конце концов физик приходит к убеждению, что в его распоряжении достаточно данных, позволяющих утверждать, что покрыть шахматную доску с двумя выпиленными по диагонали угловыми полями невозможно. Однако физик не может быть до конца уверен в

том, что это действительно так, потому что может найтись некоторое расположение домино на шахматной доске, которое не было им экспериментально обнаружено, но именно оно и дает решение задачи. Различных же вариантов расположения домино существует не один миллион, и экспериментально проверить всегда можно лишь малую их толику. Что же касается заключения задачи, то это — теория, основанная на эксперименте, и физику не остается ничего другого, как жить под угрозой, что в один «прекрасный» день эта теория может оказаться отвергнутой.

2) Математический подход

Математик стремится решить задачу, выстраивая цепочку логических аргументов, приводящую к заключению, вне всяких сомнений правильному и остающемуся безупречным навсегда. Одна из таких цепочек логических аргументов выглядит следующим образом.

- Оба угловых поля, выпиленные из доски, — белые. Следовательно на доске остались 32 черных поля и только 30 белых поля.

- Каждое домино покрывает два смежных поля, а смежные поля всегда отличаются по цвету, т. е. одно поле черное, а другое — белое.

- Следовательно, независимо от расположения домино на шахматной доске, первые 30 костей, выложенных на доску, должны покрыть 30 белых и 30 черных полей.

- Это означает, что при любом раскладе всегда останется одна домино и два непокрытых черных поля.

- Но любая кость домино покрывает на шахматной доске два смежных поля, а смежные поля всегда отличаются по цвету. Два оставшихся непокрытыми поля одного цвета, и поэтому накрыть их одной костью домино невозможно. Следовательно, покрыть эту доску 31 костью домино невозможно!

Приведенное выше доказательство показывает, что шахматную доску с двумя выпиленными по диагонали угловыми полями невозможно покрыть домино при любом расположении костей. Аналогичным образом, Пифагор создал доказательство, из которого следует, что любой прямоугольный треугольник удовлетворяет его теореме. Для Пифагора понятие математического доказательства было священным, и именно математическое доказательство позволило пифагорейскому братству открыть так много. Большинство современных доказательств невероятно сложны, и разобраться в них неспециалисту просто не по силам. В случае теоремы Пифагора ход рассуждений, к счастью, достаточно прост и опирается только на математику, которую изучают в средней школе. Доказательство теоремы Пифагора изложено в Приложении 1.

Доказательство Пифагора неопровержимо. Оно показывает, что теорема Пифагора выполняется для любого прямоугольного треугольника во Вселенной. Открытие это так потрясло Пифагора, что он в благодарность принес в жертву богам сто быков. [1] Оно стало

---

[1] Не могу отказать себе в удовольствии привести сонет А. Шамиссо, написанный по этому поводу:

Во мгле веков пред нашим взором
Блеснула истина. Она,
Как теорема Пифагора,
До наших дней еще верна.

Найдя разгадку, мудрый старец
Был благодарен небесам;
Он сто быков велел зажарить
И в жертву принести богам.

С тех пор быки тревожно дышат, —
Они, кляня дары богов,
О новой истине услышав,
Ужасный поднимают рев.

вехой в развитии математики и одним из самых важных прорывов в истории цивилизации. Значение этого открытия было двояким.

Во-первых, оно позволило сформулировать представление о том, что такое доказательство. Доказанный математический результат обладает более глубокой истинностью, чем любая другая истина, поскольку получен шаг за шагом с помощью логических рассуждений. Хотя философ Фалес Милетский еще до работ Пифагора использовал несколько простых геометрических доказательств, Пифагор развил идею математического доказательства гораздо дальше и сумел доказать более хитроумные математические утверждения.

Во-вторых, теорема Пифагора устанавливает связь между абстрактным математическим методом и чем-то осязаемым. Пифагор показал, что математическая истина приложима к физическому миру и служит его логическим основанием. Математика дает физике строгое начало, а затем, к этому незыблемому основанию физики добавляются наблюдения и измерения, отягощенные ошибками.

Бесконечное количество пифагоровых троек

Пифагорейцы своим страстным поиском истины с помощью доказательства вдохнули в математику живительную силу. Вести о достигнутых ими успехах распространились по всему Древнему Миру, хотя подробности своих открытий пифагорейцы хранили в строгой тайне. От желающих проникнуть в святилище знания не было отбоя, но только самые блестящие умы могли рассчитывать на прием в братство. Один из тех, кому ответили отказом, был кандидат по имени Силон. Он затаил обиду на унизительный отказ и спустя двадцать лет взял реванш.

Во время шестьдесят седьмой Олимпиады (510 год до н. э.) в соседнем городе Сибарисе произошло восстание. Телис, победоносный лидер восстания, начал варварскую кампанию преследования сторонников прежнего правительства, которая заставила многих из них искать убежища в Кротоне. Телис потребовал, чтобы предателей вернули в Сибарис, чтобы те понесли наказание, но по призыву Мило и Пифагора жители Кротона выступили против тирана в защиту беглецов. Телис пришел в ярость и, быстро собрав армию численностью в 300000 воинов, пошел маршем на Кротон, оборону которого возглавил Мило, собравший под своим началом 100000 вооруженных жителей города. На семидесятый день войны защитники Кротона под предводительством Мило одержали победу. В качестве возмездия Мило приказал повернуть воды реки Кратис так, чтобы они затопили Сибарис и разрушили город.

Война окончилась, но Кротон бурлил: жители спорили о том, как по справедливости разделить военные трофеи. Опасаясь, что земли достанутся пифагорейской элите, рядовые жители Кротона начали ворчать. Недовольство все более возрастало, так как пифагорейское братство продолжало удерживать в тайне свои открытия, но никаких действий жители Кротона не предпринимали до тех пор, пока в дело не вмешался Силон. Сыграв на страхах, умопомешательстве и зависти толпы, Силон возглавил ее и повел, чтобы разрушить самую блестящую математическую школу, которую когда-либо знал мир. Дом Мило и соседняя школа были окружены. Все двери были закрыты и забаррикадированы, чтобы те, кто находились внутри, не могли спастись, а затем оба здания были подожжены. Мило сумел

Их старца имя потрясает,
Их истины лучи слепят;
И, новой жертвы ожидая,
Быки, зажмурившись, дрожат.

— E.G.A.

вырваться из ада и убежать, а Пифагор вместе со своими многочисленными учениками был убит.

Математика потеряла своего первого героя, но пифагорейский дух не был сокрушен. Числа и математические истины бессмертны. Пифагор показал, что математика в большей степени, чем какая-нибудь другая научная дисциплина, лишена субъективности. Его ученикам и последователям не был нужен учитель, чтобы решить, верна ли та или иная теория. Истинность математической теории не зависит от чьего бы то ни было мнения. Арбитром вместо мнения стала логичность математической конструкции. Величайшим вкладом Пифагора в цивилизацию стал способ достижения истины, не подвластный ошибочности человеческого суждения. После нападения Силона и смерти своего отца-основателя, пифагорейцы покинули Кротон и разбрелись по другим городам Древней Греции.

Но преследования продолжались, и в конце концов многие пифагорейцы были вынуждены поселиться на чужбине. Вынужденная эмиграция способствовала тому, что пифагорейцы распространили свое математическое учение по всему Древнему Миру. Ученики и последователи Пифагора основали новые школы и обучили своих учеников методу логического доказательства. Помимо известного им доказательства теоремы Пифагора они поведали миру секрет нахождения так называемых пифагоровых троек.

Пифагоровы тройки представляют собой комбинации из трех целых чисел, удовлетворяющих соотношению Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$. Например, соотношение Пифагора выполняется при $x=3$, $y=4$ и $z=5$:

$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2, 9 + 16 = 25}$

Другой способ получения пифагоровых троек — перестройка квадратов. Если взять квадрат 3×3, состоящий из 9 квадратных плиток, и квадрат 4×4, состоящий из 16 плиток, то все эти плитки можно расположить по-новому, так, чтобы они образовывали квадрат 5×5, состоящий из 25 плиток (рис. 4).

+

=

$$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$$
$$\mathbf{9 + 16 = 25}$$

Рис. 4

Пифагорейцы мечтали найти и другие пифагорейские тройки, другие квадраты, из которых можно было бы сложить третий квадрат больших размеров. Еще одна пифагорова тройка: $x=5$, $y=12$ и $z=13$:

$\mathbf{5^2 + 12^2 = 13^2, 15 + 144 = 169}$.

Приведем пифагорову тройку из больших чисел: $x=99$, $y=4900$ и $z=4901$. По мере того, как числа возрастают, пифагоровы тройки встречаются все реже и находить их становится все труднее и труднее. Пифагорейцы изобрели метод отыскания таких троек и, пользуясь им, доказали, что пифагоровых троек существует бесконечно много.

От теоремы Пифагора до Великой теоремы Ферма

О теореме Пифагора и бесконечном числе пифагоровых троек шла речь в книге Э.Т. Белла «Великая проблема» — той самой библиотечной книге, которая привлекла внимание Эндрю Уайлса. И хотя пифагорейцы достигли почти полного понимания

пифагорейских троек, Уайлс скоро обнаружил, что у невинного на первый взгляд уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ имеется и темная сторона — в книге Белла давалось описание математического чудовища.

В уравнение Пифагора входят три числа x, y и z, все три числа входят в квадрате (например, $x^2 = x \cdot x$):

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Но в той же книге Белла приводилось и уравнение, очень похожее на уравнение Пифагора, но отличающееся от него тем, что все числа входят в кубе (например, $x^3 = x \cdot x \cdot x$). Так называемая степень переменной x в этом уравнении равна не 2, а 3:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Найти целочисленные решения уравнения Пифагора, т. е. пифагоровы тройки, было сравнительно легко, но стоит лишь степени измениться с 2 на 3 (т. е. заменить квадраты кубами), как решение уравнения, столь похожего на уравнения Пифагора, в целых числах, по-видимому, становится невозможным. Поколения математиков исписывали страницу за страницей в своих блокнотах в тщетной надежде найти решение уравнения в целых числах.

При решении исходного «квадратного» уравнения плитки, из которых состояли два квадрата, требовалось расположить так, чтобы они образовывали третий квадрат более крупных размеров. В случае решения «кубического» уравнения из кубиков, образующих два куба, требуется составить третий куб более крупных размеров. Ясно, что независимо от того, какие два куба выбраны в качестве исходного, из образующих их кубиков можно сложить либо третий куб, причем несколько кубиков останутся «лишними», либо неполный (недостроенный) куб. Ближайшим к идеальному кубу будет такая кладка, в которой один кубик останется лишним или окажется недостающим. Например, если мы начнем с кубов 63 и 83 то, рассыпав их на кубики, сможем сложим из них кладку, в которой всего лишь одного кубика не хватит до полного куба 93 (рис. 5).

+

=

$$\mathbf{6^3 + 8^3 = 9^3 - 1}$$

216 + 512 = 729 - 1

Рис. 5

Найти три целых числа, которые в точности удовлетворяют кубическому уравнению, по-видимому, невозможно. Иначе говоря, по-видимому, у уравнения

$$x^3 + y^3 = z^3$$

не существует целочисленных решений. Более того, если степень повысить с 3 (куба) до любого большего целого числа (т. е. до 4, 5, 6…), то найти целочисленное решение такого уравнения, по-видимому, также невозможно. Иначе говоря, у более общего уравнения

$$x^n + y^n = z^n,$$

где n больше 2, решения в целых числах не существует. Всего лишь изменив 2 в уравнении Пифагора на любое целое число бóльшее 2, мы вместо сравнительно легко решаемого уравнения получаем задачу умопомрачительной сложности. Великий математик XVII века француз Пьер де Ферма сделал удивительное заключение: он утверждал, что знает, почему никому не удавалось найти решение общего уравнения в целых числах. По его словам, причина заключалась в том, что такого решения не существует.

Ферма был одним из наиболее блестящих и загадочных математиков в истории. Как и всякий другой, он не мог проверить бесконечно много чисел, но был абсолютно уверен в том, что не существует тройки целых чисел, которая удовлетворяла бы общему уравнению, так как его уверенность опиралась на доказательство. Подобно Пифагору, которому вовсе не требовалось проверить все мыслимые треугольники, чтобы убедиться в правильности своей теоремы, у Ферма не было необходимости перепробовать все мыслимые тройки целых чисел, чтобы убедиться в справедливости его теоремы.

Прочитав всю книгу Э.Т. Белла от корки до корки, Уайлс узнал, как Ферма был восхищен теоремой Пифагора и ее доказательством, и как сам постепенно увлекся изучением «испорченного» уравнения Пифагора. Прочитав о том, как Ферма провозгласил, что даже если математики всего мира потратят целую вечность, чтобы найти решение уравнения, носящего ныне его имя, в целых числах, то и тогда им не удастся найти ни одного решения. Уайлс в нетерпении перевернул несколько страниц, предвкушая удовольствие от разбора доказательства Великой теоремы Ферма, но тщетно: доказательства не было. Не было его не только в книге Э.Т. Белла, но и нигде. В конце книги говорилось, что найденное Ферма доказательство давно утеряно. Никаких указаний, намеков или догадок относительно того, как можно было бы восстановить доказательство или построить его заново не было. Уайлс был заинтригован, разъярен и озадачен. По крайней мере, он находился в хорошей компании.

Более 300 лет многие из крупнейших математиков пытались вновь открыть утерянное доказательство Ферма, но тщетно. С неудачей очередного поколения следующее поколение испытывало все большее разочарование и решимость. В 1742 году, почти через сто лет после смерти Ферма, швейцарский математик Леонард Эйлер обратился к своему другу Клеро с просьбой поискать в доме Ферма, не осталось ли где-нибудь клочка бумаги с жизненно важным фрагментом доказательства. Но никому никогда не удалось найти ни малейшего намека относительно того, каким могло быть доказательство Ферма. В гл. 2 мы узнаем более подробно о загадочной фигуре Пьера де Ферма, и о том, как было утеряно доказательство. А пока мы ограничимся лишь тем, что скажем: Великая теорема Ферма, проблема, над решением которой математики ломали головы на протяжении столетий, захватила воображение юного Эндрю Уайлса.

Десятилетний мальчик в библиотеке на Милтон-роуд не мог оторвать взгляда от самой знаменитой проблемы математики. Обычно при решении математической задачи понять уравнение означает половину дела. Но формулировка теоремы Ферма очень проста: требуется доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решения в целых числах при n больше 2. Эндрю не смущало, что самые блестящие умы на Земле потерпели фиаско, пытаясь заново открыть доказательство Ферма. Уайлс немедленно принялся за работу, пытаясь с помощью всей премудрости, которую он только мог извлечь из учебников математики, восстановить утраченное доказательство. А что если ему удастся сделать то, что не удалось никому, кроме Ферма? Обнаружить то, что все проглядели? Уайлс мечтал потрясти мир.

И через тридцать лет Эндрю Уайлсу действительно удалось осуществить задуманное. В аудитории Института сэра Исаака Ньютона он, покрыв всю доску вычислениями и с трудом сдерживая торжество, обернулся лицом к аудитории. Его лекция достигла кульминации, и аудитория сознавала, что наступил великий момент. Один или двое из присутствовавших тайком пронесли на лекцию фотоаппараты, и заключительные замечания Уайлса сопровождались вспышками яркого света.

Держа мел в руке, Уайлс в последний раз повернулся к доске. Последние несколько

строк, и доказательство завершено. Впервые за триста лет вызов, брошенный Ферма, получил достойный ответ. Еще несколько камер под блеск вспышек запечатлели исторический момент. Уайлс написал формулировку Великой теоремы Ферма, повернулся к аудитории и сказал: «Думаю, мне следует на этом остановиться».

23 июня 1993 года Уайлс выступил с лекцией в Институте сэра Исаака Ньютона в Кембридже. На снимке вы видите Уайлса через мгновенье после того, как он объявил о найденном им доказательстве Великой теоремы Ферма

Двести математиков вскочили в едином порыве и зааплодировали. Аплодировали все, даже те, кто встретил весть о полученном результате кривой ухмылкой недоверия. Так три десятилетия спустя Уайлс поверил в то, что ему удалось осуществить свою мечту, и после семи лет работы в полной изоляции решился обнародовать итоги своих тайных вычислений. Но пока радость переполняла собравшихся в Институте Ньютона, трагедия уже была готова разразиться. И Уайлс, радуясь вместе со всеми, кто собрался в аудитории, еще не знал о тех злоключениях, которые не замедлили вскоре последовать.

Глава 2. Создатель Великой проблемы

Знаете, — признался дьявол, — даже самые лучшие математики на других планетах, а они, должен вам сказать, намного опередили ваших, не решили ее.

Взять хотя бы того парня на Сатурне, что очень похож на гриб на ходулях. Он в уме решает дифференциальные уравнения в частных производных. Так даже он не справился с этой задачей.

А. Порджес. Дьявол и Саймон Флэгг

Пьер де Ферма родился 20 августа 1601 года в городе Бомон-де-Ломань на юго-западе Франции. Его отец, Доминик Ферма, был состоятельным торговцем кожей, поэтому Пьер имел счастливую возможность получить престижное образование во французском монастыре Грансельва, а затем, в течение некоторого времени учиться в университете Тулузы. Не сохранилось никаких документов, свидетельствующих о том, что юный Ферма проявил блестящие способности к математике.

Под давлением семьи Ферма поступил на гражданскую службу и в 1631 году был назначен советником парламента Тулузы (conseiller au Parlement de Toulouse) — заведующим отдела прошений. Если местные жители хотели подать петицию королю по любому вопросу, то сначала им было нужно убедить Ферма и его коллег в важности причин, вынуждающих подавать петицию. Советники осуществляли живую связь между провинцией и Парижем. Помимо этого они были обязаны следить за тем, чтобы в провинциях исполнялись королевские указы, издававшиеся в столице. Ферма плодотворно трудился на своем посту и, судя по всем отзывам, выполнял свои обязанности прилежно, а к просителям относился доброжелательно.

Кроме того, в обязанности Ферма входил разбор судебных дел. Он занимал достаточно высокий пост для того, чтобы ему поручали ведение наиболее серьезных дел. Оценку его деятельности мы находим в записках английского математика Кенельма Дигби, которому понадобилось по некоторому делу навестить Ферма. В письме к их общему коллеге — Джону Валлису — Дигби сообщает, что их французский коллега чрезвычайно занят неотложными судебными делами, и намеченная встреча не представляется возможной.

«Правда, — пишет Дигби, — меня угораздило прибыть именно в тот день, когда судьи из Кастра собираются в Тулузе, где он [Ферма] исполняет обязанности Главного судьи Суверенного суда парламента, и с тех пор он занят самыми крупными делами огромной

важности. Слушание одного из дел завершилось вынесением Ферма приговора, который наделал много шума. Речь шла об осуждении священника, дурно исполнявшего свои обязанности и приговоренного к сожжению на эшафоте. Тем дело и закончилось. Приговор был приведен в исполнение».

Ферма регулярно переписывался с Дигби и Валлисом. Как мы увидим далее, эти письма часто были довольно сухими, но они позволяют заглянуть в повседневную жизнь Ферма, в том числе и в его математические изыскания.

Ферма быстро продвигался по ступеням служебной лестницы и вошел в круг знати, о чем свидетельствует небольшая частица «де», появившаяся перед его именем: Пьер де Ферма. Успешная карьера Ферма связана не столько с его честолюбивыми устремлениями, сколько с его здоровьем. В то время в Европе свирепствовала чума, и те, кто выживал, поднимались по служебной лестнице, занимая места умерших. В 1652 году настал черед и самого Ферма: он тоже заболел чумой и был настолько плох, что его друг Бернар Медон даже известил нескольких коллег о кончине Ферма. Но вскоре Медон исправил свою ошибку в письме к голландцу Николасу Хайнсиусу: «Ранее я сообщил Вам о кончине Ферма. Но он все еще жив, и мы более не опасаемся его смерти, хотя еще совсем недавно считали его среди мертвых. Чума более не свирепствует между нами».

Помимо риска, которому во Франции XVII века подвергалось его здоровье, Ферма было необходимо выживать в условиях политических опасностей. Его назначение в парламент Тулузы последовало ровно через три года после того, как кардинал Ришелье стал премьер-министром Франции. Это был век заговоров и интриг, и каждый, кто был вовлечен в управление государством даже на провинциальном уровне, должен был с особой осторожностью следить за тем, чтобы не оказаться в хитросплетении махинаций кардинала.

Ферма избрал стратегию неукоснительного исполнения возложенных на него обязанностей и не беспокоился о себе. У него не было особых политических амбиций, и он делал все от него зависящее, чтобы по возможности оставаться в стороне от кипения парламентских страстей. Всю энергию, которую ему удавалось сохранить после исполнения служебных обязанностей, Ферма отдавал математике, и, когда не нужно было приговаривать священников к сожжению на эшафоте, Ферма с наслаждением предавался своему увлечению. По существу, Ферма был истинным ученым-любителем, человеком, которого Э.Т. Белл назвал «князем любителей». Но математический талант его был столь велик, что Джулиан Кулидж в своей книге «Математика великих любителей» исключил Ферма из числа любителей на том весьма веском основании, что тот «был настолько велик, что должен считаться профессионалом».

В начале XVII века математика еще только оживала после мрачного Средневековья, и занятия этой наукой в глазах общества котировались не очень высоко. Соответственно, отношение к математикам было лишено должного уважения, и многим математикам приходилось своими силами добывать средства для занятий любимой наукой. Например, Галилей не смог изучать математику в Пизанском университете и был вынужден искать себе частного преподавателя. Единственное учебное заведение в Европе, где математиков активно поощряли, был Оксфордский университет, учредивший в 1619 году Савильянскую кафедру геометрии. По правде сказать, математики XVII века в большинстве своем были любителями, но Ферма был особым случаем. Живя вдали от Парижа, он был изолирован даже от того небольшого математического сообщества которое тогда существовало (а в него входили такие фигуры, как Паскаль, Гассенди, Роберваль, Богран и отец Марен Мерсенн).

Отец Мерсенн внес небольшой вклад в теорию чисел, и тем не менее в истории математики XVII века он сыграл более важную, хотя и неоднозначную, роль, чем его более признанные и почитаемые коллеги. После вступления в 1611 году в орден минимов Мерсенн изучал математику, а затем преподавал этот предмет другим монахам и монахиням в монастыре ордена в Невере. Восемью годами позже Мерсенн переезжает в Париж и присоединяется к ордену Миним дель'Анносиад, неподалеку от Пале Ройяль — места, где, конечно же, собирались интеллектуалы. Мерсенн встречался с парижскими математиками,

но их нежелание обсуждать научные проблемы с ним и между собой опечалило его.

Замкнутость парижских математиков была традицией, сохранившейся от косситов XVI века. Косситы были знатоками всевозможных вычислений. Купцы и деловые люди прибегали к их услугам для решения сложных задач, возникающих в связи с учетом товаров. Слово «коссит» восходит к итальянскому слову «cosa», означающему «вещь», так как косситы использовали символы для обозначения неизвестных величин, подобно тому, как современные математики обозначают неизвестную величину символом x . Все, кто в ту пору профессионально занимался решением задач, изобретали свои собственные хитроумные методы выполнения вычислений и держали их в тайне, чтобы сохранить свою репутацию единственных в своем роде людей, способных решать задачи того или иного типа.

Исключением был Никколо Тарталья, придумавший метод быстрого решения кубических уравнений. Он сообщил свое открытие Джироламо Кардано и взял с того клятву, что тот никому не откроет доверенную ему тайну. Через десять лет Кардано нарушил свое обещание и опубликовал метод Тартальи в книге «Ars Magna» (Великое искусство). Этот поступок Тарталья никогда не простил Кардано. Он порвал все отношения с Кардано, а последовавшее затем острое публичное разбирательство только укрепило остальных математиков в решимости хранить свои профессиональные тайны. Скрытный характер математических исследований сохранился до конца XIX века, и, как мы увидим в дальнейшем, имеются отдельные примеры, когда математические гении проводили свои исследования в тайне от коллег даже в XX веке.

По прибытии в Париж отец Мерсенн вознамерился покончить с обычаем математиков проводить исследования в тайне от своих коллег и стал всячески способствовать обмену идей между математиками и поощрять использование результатов одного математика в работе другого. Отец Мерсенн добился того, что математики начали регулярно проводить встречи. Позднее его группа стала тем ядром, вокруг которого сформировалась Французская академия. Если все приглашенные на заседание отвечали отказом, то Мерсенн все же старался собрать какую-то группу, сообщая математикам содержание писем и работ, присланных ему конфиденциально. Для человека в сутане такое поведение вряд ли было этичным, но отец Мерсенн оправдывал его тем, что обмен информацией идет на пользу математике и человечеству. Столь неблаговидные поступки, разумеется не могли не вызывать резкой полемики между монахом, руководствовавшимся благими намерениями, и «солистами» ученого мира, не склонными делиться с коллегами своими тайнами. Все это привело к разрыву давних отношений между Мерсенном и Декартом (продолжавшихся со времен совместной учебы в иезуитском Коллеже в Ла Флеше). Мерсенн обнародовал философские работы Декарта, которые могли бы быть истолкованы как оскорбительные для церкви, но к чести отца Мерсенна следует заметить, что он выступил в защиту Декарта, когда тот был подвергнут критике со стороны теологов (ранее Мерсенн поступил так же, когда церковные власти преследовали Галилея). В эпоху тотального господства религии и магии отец Мерсенн отстаивал рациональную мысль.

Мерсенн много путешествовал по Франции и далеко за ее пределами, повсюду распространяя вести о последних математических открытиях. В своих странствиях он, в частности, захотел встретиться с Пьером де Ферма, и их встреча, по-видимому, стала единственным контактом тулузского отшельника с другим математиком. Мерсенн оказал на «князя любителей» влияние, уступавшее, возможно, только «Арифметике» Диофанта (сборнику математических трактатов, доставшихся XVII веку в наследие от древних греков). Ферма никогда не расставался с «Арифметикой».

Даже когда от поездок пришлось отказаться, Мерсенн продолжал поддерживать отношения с Ферма и другими математиками, направляя им огромное количество писем. После смерти Мерсенна обнаружилось, что его апартаменты были битком набиты письмами от семидесяти восьми различных корреспондентов.

Несмотря на настойчивые просьбы отца Мерсенна, Ферма упорно отказывался публиковать свои доказательства. Публикация результатов и признание ничего не значили

для него. Ферма получал удовлетворение от сознания того, что он в тиши своего кабинета без помех может создавать новые теоремы. Но скромный и замкнутый гений не был чужд озорству. В сочетании с его отстраненностью это иногда проявлялось при общении Ферма с другими математиками, когда он поддразнивал своих коллег: направляя им письма с формулировками последних теорем, он неизменно умалчивал о доказательствах. Ферма бросал своим современникам вызов, испытывая их способность найти недостающее доказательство.

То, что Ферма никогда не раскрывал своих доказательств, вызывало у его коллег чувство горького разочарования. Рене Декарт называл Ферма «хвастуном», а англичанин Джон Валлис называл его «проклятым французом». К несчастью для англичан, Ферма доставляло особое удовольствие разыгрывать своих коллег по ту сторону Ла-Манша.

Помимо удовольствия, которое доставляло Ферма поддразнивание своих коллег, его обыкновение формулировать проблему и скрывать ее решение имело под собой и более практическую мотивацию. Прежде всего оно означало, что Ферма не имел времени подробно излагать полученное им доказательство; он торопился перейти к решению следующей проблемы. Кроме того, такая тактика избавляла Ферма от мелких придирок со стороны ревнивых коллег. Будучи опубликованным, доказательство становится доступным для изучения и критики со стороны всех и каждого, кто хотя бы немного смыслит в предмете. Когда Блез Паскаль стал настаивать на публикации некоторых из работ Ферма, тулузский отшельник возразил: «Какая бы из моих работ ни считалась достойной опубликования, я вовсе не желаю, чтобы мое имя появлялось в печати». Ферма был замкнутым гением, пожертвовавшим славой ради того, чтобы критики не досаждали ему мелочными придирками.

В переписке Ферма с Паскалем (единственный случай, когда Ферма обсуждал идеи с кем-нибудь, кроме Мерсенна) речь шла о рождении нового раздела математики — теории вероятностей. Паскаль ввел математического отшельника в круг проблем новой дисциплины, и поэтому ему, несмотря на пристрастие к уединению, пришлось поддерживать диалог. Совместными усилиями Ферма и Паскаль получили первые доказательства и обнаружили в теории вероятностей незыблемые истины, хотя неопределенность — суть предмета этой теории. Интерес Паскаля к теории вероятностей пробудил профессиональный игрок из Парижа Антуан Гомбо, шевалье де Мере, который поставил перед Паскалем задачу, имевшую отношение к следующей азартной игре. Игроки по очереди бросают игральную кость и замечают, сколько очков выпадает при броске. Выигрывает (и забирает стоящие на кону деньги) тот из игроков, кто первым наберет определенное количество очков.

Гомбо играл в эту игру с партнером, но оба вынуждены были прекратить игру под давлением непредвиденных обстоятельств. Возникла проблема: как разделить деньги, стоявшие на кону? Простое решение состояло бы в том, чтобы всю сумму, стоявшую на кону, забрал тот из партнеров, который успел набрать больше очков, но Гомбо спрашивал у Паскаля, не существует ли более справедливого способа разделить деньги. Паскалю было необходимо вычислить вероятность каждого из партнеров на выигрыш в случае продолжения игры в предположении, что каждый партнер набирал бы последующие очки с одинаковой вероятностью. Деньги, стоявшие на кону, следовало бы поделить пропорционально вычисленным вероятностям.

До XVI века законы вероятности определялись исходя из интуиции и опыта игроков, но Паскаль затеял переписку с Ферма с целью открыть математические правила, которые более точно описывают законы случая. Три столетия спустя Бертран Рассел так прокомментировал этот явный оксиморон: «Как только мы осмеливаемся говорить о законах случая? Разве случай — не антитеза всякому закону?»

Французы исследовали задачу Гомбо и вскоре поняли, что она сравнительно проста и ее можно строго решить, определив все потенциальные исходы игры и приписав каждому исходу соответствующую вероятность. И Паскаль, и Ферма сумели независимо решить задачу Гомбо, но их сотрудничество ускорило решение и позволило им глубже исследовать

другие, более тонкие и трудные, вопросы теории вероятностей.

Задачи теории вероятностей иногда кажутся парадоксальными, потому что математическое решение (правильный ответ) нередко не согласуется с интуицией. Такие провалы интуиции могут показаться удивительными, поскольку «выживание наиболее приспособленного» должно было оказать сильное эволюционное давление на развитие мозга, способного от природы анализировать проблемы теории вероятностей. Можно представить себе наших предков, подкрадывающихся к олененку и решающих, стоит или не стоит им нападать на него. Велик ли риск, что олень бросится защищать свое чадо и нападет на обидчика? С другой стороны, какова вероятность, что представится более удобный случай добыть свежее мясо на обед, если нападение на олененка считать излишне рискованным? Талант к оценке вероятностей должен быть неотъемлемой частью нашей генетической структуры, и тем не менее наша интуиция нередко заставляет нас делать неверные заключения.

Например, в сильнейшем противоречии с интуицией находится задача о вероятности совпадения дней рождения. Представьте себе футбольное поле, на котором находятся 23 человека: игроки двух команд (22 человека) и судья. Какова вероятность, что у двух из них дни рождения совпадают?

Поскольку речь идет о 23 людях, а выбирать приходится из 365 дней, кажется маловероятным, чтобы у кого-нибудь из тех, кто находится на футбольном поле, дни рождения совпали. Если попросить кого-нибудь оценить вероятность совпадения числом, то большинство людей оценят эту вероятность не выше 10 %. В действительности же правильный ответ гласит: чуть выше 50 %. Иначе говоря, если взвешивать на весах теории вероятностей, то вероятность совпадения дней рождения все-таки чуть-чуть больше, чем вероятность того, что никакие два дня рождения не совпадают.

Причина столь высокой вероятности совпадения двух дней рождения заключается в том, что число способов, которыми людей можно разбить на пары, гораздо больше числа самих людей. Если требуется найти совпадающие дни рождения, то необходимо знать не количество людей, а число пар, на которые их можно разбить. Так как число людей на футбольном поле равно 23, то число пар равно 253. Например, первого из находящихся на футбольном поле можно включать в одну пару с любым из 22 других, что дает для начала 22 пары. Второму можно подобрать в пару любого из 21 остальных людей на поле (поскольку мы уже сосчитали второго один раз, когда подсчитывали число пар с участием первого, число пар со вторым следует уменьшить на единицу), и мы получаем еще 20 пар. Продолжая рассуждать так же, мы в итоге получим 253 пары.

То, что вероятность совпадения дней рождения в группе из 23 людей оказывается больше 50 %, противоречит интуиции. Тем не менее с точки зрения математики ответ правильный. Именно на такие «странные», противоречащие интуитивным, представления опираются букмекеры и игроки, используя опрометчивость азартных людей. В следующий раз, когда вам случится быть на заседании или званом обеде, на котором окажется 23 участника, можете заключить пари, что среди присутствующих найдутся два человека, дни рождения которых совпадают. Следует иметь в виду, что в группе из 23 человек вероятность совпадения двух дней рождения лишь слегка превышает 50 %, но с увеличением численности группы вероятность совпадения быстро увеличивается.

Ферма и Паскаль заложили основы тех правил, которым подчиняются все азартные игры и которые могут быть использованы игроками, чтобы выработать идеальную стратегию игры и стратегию заключения пари. Кроме того, обнаруженные Ферма и Паскалем законы теории вероятностей нашли приложения в целом ряде областей человеческой деятельности — от спекулятивной игры на фондовой бирже до оценивания вероятности ядерной катастрофы.

Паскаль был даже убежден, что мог бы применить свои теории для обоснования веры в Бога. Он утверждал, что «азарт, который испытывает игрок при заключении пари равен произведению той суммы, которую он может выиграть, и вероятности выигрыша». Далее

Паскаль утверждал, что возможный выигрыш вечного блаженства обладает бесконечно большой ценностью, а вероятность попасть в царство небесное, если вести добродетельную жизнь, заведомо конечна. Следовательно, по определению Паскаля, религия — игра бесконечно азартная и стоящая того, чтобы в нее играли, так как произведение бесконечно большого потенциального выигрыша на конечную вероятность бесконечно велико.

Разделяя с Паскалем честь быть отцом-основателем теории вероятностей, Ферма по праву может также считаться одним из основателей еще одной области математики — дифференциального исчисления. Дифференциальное исчисление позволяет вычислять скорость изменения, или производную, одной величины относительно другой (например, скорость изменения расстояния относительно времени, известную просто как скорость). Для математиков величины, как правило, абстрактны и неосязаемы, но труды Ферма имели своим следствием подлинный переворот в физике. Математика Ферма позволила физикам лучше понять, что такое скорость, и какова ее связь с другими фундаментальными величинами, такими, как ускорение — скорость изменения скорости относительно времени.

Дифференциальное исчисление оказывает сильное влияние на экономику. Инфляция — это скорость изменения цены, известная как производная цены. Кроме того, экономистов часто интересует скорость изменения инфляции, известная как вторая производная цены. Эти термины часто используются политиками, и математик Хуго Росси однажды заметил: «Осенью 1972 года президент Никсон заявил, что скорость роста инфляции пошла на убыль. Это был первый случай, когда правящий президент использовал третью производную, чтобы увеличить свой шанс на переизбрание».

На протяжении более двух столетий принято было считать, что Исаак Ньютон открыл дифференциальное исчисление независимо от Ферма, не зная о его работах. Но в 1934 году Луис Треншар Мур обнаружил заметку, которая позволила внести в вопрос о приоритете полную ясность и воздать Ферма по заслугам. Ньютон писал, что, разрабатывая дифференциальное исчисление, он опирался на «метод построения касательных месье Ферма». С XVIII века дифференциальное исчисление использовалось для описания закона всемирного тяготения Ньютона и его законов механики, зависящих от расстояния, скорости и ускорения.

Одного лишь участия в создании дифференциального исчисления и теории вероятностей было бы более чем достаточно, чтобы обеспечить Ферма место в зале славы математики, но его величайшее достижение лежит в другой области математики.

Дифференциальное исчисление используется при посылке космических кораблей на Луну, теория вероятностей — при оценке рисков страховых компаний, но Ферма питал глубочайшую любовь к разделу, который не обещал никаких приложений — теории чисел. Ферма был обуян страстью — ему хотелось во что бы то ни стало понять свойства чисел и отношения между ними. Теория чисел — наиболее чистая древнейшая область математики, и Ферма продолжал развивать этот раздел математики, доставшийся ему в наследство от Пифагора.

Эволюция теории чисел

После смерти Пифагора представление о математическом доказательстве быстро распространилось по всему цивилизованному миру. Два столетия спустя после того, как его Академия сгорела до основания, центр математических исследований переместился из Кротона в город Александрию. В 332 году до н. э., покорив Грецию, Малую Азию и Египет, Александр Македонский решил построить столицу, которая должна была стать самым величественным городом мира. Александрия действительно стала прекраснейшим городом и к тому же, хотя и не сразу, научным центром. Только после смерти Александра Македонского, когда на египетский трон взошел его единоутробный брат Птолемей I, Александрия стала тем местом, где возникло первое в мире высшее учебное заведение — Академия. Математики и другие интеллектуалы, привлеченные репутацией Академии, и, еще

в большей степени, Александрийской библиотеки, стали перебираться в культурную столицу Птолемея I.

Замысел создания Библиотеки принадлежал Деметрию Фаларею, непопулярному оратору, который был вынужден бежать из Афин.

После долгих странствий он нашел прибежище в Александрии. Фаларею удалось внушить Птолемею I мысль о том, что следует собрать все великие сочинения, а вслед за книгами в Александрию потянутся и великие умы. Когда в хранилищах Александрийской библиотеки оказались собраны сочинения из Египта и Греции, специальные агенты разъехались в поисках сокровищ знания по Европе и Малой Азии. Ненасытный аппетит собирателей Библиотеки ощущали на себе все, кто посещал в ту пору Александрию: при въезде в город у приезжих отбирали всю литературу и передавали писцам. Со всех сочинений те снимали копии, после чего подлинники отправлялись в Библиотеку, а копии с благодарностью возвращались прежним владельцам книг. Тщательное копирование всех сочинений, оказавшихся в багаже прибывающих в Александрию путешественников, вселяет в современных историков надежду, что где-нибудь в мире на чердаке будет обнаружена копия какого-нибудь великого сочинения, считавшегося утерянным. Так, в 1906 году историк науки Гейберг обнаружил в Константинополе такую рукопись — «Метод», в которой содержалось несколько сочинений Архимеда.

Мечта Птолемея I о постройке сокровищницы знания пережила его самого, и к тому времени, когда на троне сменилось несколько представителей династии Птолемеев, Александрийская библиотека уже насчитывала более 600 000 сочинений. Изучая математику в Александрии, математики могли научиться всему, что было известно в мире, а учили их в Академии самые знаменитые ученые Древнего Мира. Первым главой математического факультета был не кто иной, как сам Евклид.

Евклид родился около 330 года до н. э. Подобно Пифагору, Евклид искал математическую истину ради самой математической истины и не занимался поиском приложений своих работ. Легенда рассказывает, что один ученик спросил Евклида, какая польза от математики, которую он изучает. Закончив урок, Евклид обратился к рабу и, указав на ученика, сказал: «Дай ему обол, ибо он желает иметь пользу от того, что изучает». Вскоре этот ученик был изгнан.

Значительную часть своей жизни Евклид провел за написанием «Начал» — учебника геометрии, имевшего наибольший успех за всю историю человечества. Вплоть до XX века «Начала» были вторым бестселлером после Библии. «Начала» состоят из тринадцати книг, часть которых посвящена изложению результатов исследований самого Евклида, а остальные представляют собой компиляцию всех математических знаний его века. Например, результаты исследований членов пифагорейского братства занимают две книги. За столетия, прошедшие после кончины Пифагора, математики изобрели множество разнообразных логических приемов, применимых в различных обстоятельствах, и Евклид искусно использовал в «Началах» все эти методы. В частности, Евклид применил логическое оружие, известное как reductio ad absurdum, или доказательство от противного. Этот метод вращается вокруг довольно хитроумной идеи: чтобы доказать истинность теоремы, прежде всего необходимо предположить, что эта теорема неверна. Далее математик изучает логические следствия того, что теорема неверна. В каком-то пункте в логической цепочке обнаруживается противоречие (например, выясняется, что 2+2=5). Математика питает непреодолимое отвращение к противоречиям. Отсюда делается заключение, что исходная теорема не может быть неверна, т. е. она истинна.

Английский математик Г.Г. Харди кратко выразил дух доказательства от противного в своей книге «Апология математика»: «Reductio ad absurdum, столь любимое Евклидом, — одно из самых прекрасных орудий математика. Это гораздо более тонкий гамбит, чем любая шахматная партия: шахматист может пожертвовать пешкой или даже какой-нибудь фигурой, но математик жертвует партией».

Одно из наиболее известных доказательств Евклида от противного — доказательство

существования так называемых иррациональных чисел. По-видимому, иррациональные числа первоначально были открыты пифагорейцами несколькими столетиями раньше, но понятие иррационального числа вызывало у Пифагора столь сильное отвращение, что он отрицал существование иррациональных чисел.

Когда Пифагор провозгласил, что Вселенной управляют числа, он имел в виду только целые числа и их отношения, называемые рациональными числами. Иррациональное же число не является ни целым, ни дробью, и именно это обстоятельство казалось Пифагору отвратительным. Действительно, иррациональные числа настолько необычны, что их невозможно записать в виде конечных десятичных дробей или бесконечных периодических дробей. Например, такая бесконечная периодическая непрерывная дробь, как 0,111111…, — число весьма и весьма обыкновенное: оно равно дроби 1/9. То, что единица повторяется неограниченно много раз, означает лишь, что данное десятичное число обладает очень простой и регулярной структурой. В свою очередь такая строгая регулярность, несмотря на неоднократное (в действительности — бесконечнократное) повторение, означает, что данную бесконечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби. Но если вы захотите представить иррациональное число в виде десятичной дроби, то у вас получится бесконечная дробь, структура которой не будет регулярной и сколько-нибудь обозримой.

Для Пифагора идея красоты математики состояла в том, что рациональные числа (целые числа и обыкновенные дроби) позволяют объяснить все явления в природе. Эта путеводная философия ослепила Пифагора, не давая ему увидеть существование иррационального числа и, возможно, даже привела к казни одного из его учеников. Легенда рассказывает о том, что один из учеников Пифагора по имени Гиппас на досуге забавлялся с числом √2, пытаясь найти эквивалентную ему обыкновенную дробь. В конце концов он понял, что такой дроби не существует, т. е. √2 — иррациональное число. Совершив столь важное открытие, Гиппас, должно быть, пришел в неописуемый восторг, чего нельзя было сказать о его учителе. Пифагор определял все происходящее в мире с помощью рациональных чисел, и существование иррациональных чисел ставило под сомнение его идеал. Открытие Гиппаса могло бы повлечь за собой период споров и сомнений, и Пифагору пришлось бы признать новый источник чисел. Но Пифагор не хотел признать свои заблуждения и в то же время не мог разрушить аргументацию Гиппаса силой логики. К своему вечному позору, он приговорил Гиппаса к смерти через утопление.

Отец логики и математического метода прибег к силе, но так и не признал, что был неправ. Это было его самым позорным деянием и, возможно, величайшей трагедией греческой математики. Иррациональные числа обрели «права гражданства» в математике только после смерти Пифагора.

Введение иррациональных чисел означало гигантский прорыв в математике. Математики получили возможность бросить взгляд за пределы целых чисел и обыкновенных дробей, оглядеться и открывать или, быть может, изобретать новые числа. По словам математика XIX века Леопольда Кронекера: «Бог создал целые числа; все остальное дело рук человеческих».

Самым замечательным иррациональным числом по праву считается число π. В школе его иногда заменяют приближенным значением 31/7 или 3,14. Истинное значение π ближе к 3,14159265358979323846, но и эта длинная десятичная дробь — не более чем приближение к истинному значению числа π. В действительности же число π невозможно точно представить в виде десятичной дроби, так как десятичная дробь получается бесконечной и в распределении цифр нет никакой закономерности. Одна из замечательных особенностей случайного распределения цифр в десятичной записи числа π заключается в том, что вычислить ее можно с помощью весьма регулярного соотношения:

Вычислив первые несколько членов, вы можете получить весьма грубое приближение к

π, однако последующие вычисления дают довольно хорошее приближение.

Вообще говоря, для вычисления длины окружности Вселенной с точностью до радиуса атома водорода достаточно знание 39 знаков числа π. Тем не менее, это не мешает специалистам вычислять число π на компьютере с очень большим количеством знаков. Текущий рекорд принадлежит Ясумасе Канаде из Токийского университета, который в 1996 году вычислил 6 миллиардов знаков десятичного разложения числа π. Недавно прошел слух о том, что русские по происхождению братья Чудновские из Нью-Йорка вычислили 8 миллиардов знаков десятичного разложения числа π и намереваются вычислить триллион десятичных знаков. Если Канада или братья Чудновские вознамерились бы продолжать свои вычисления до тех пор, пока их компьютеры не исчерпают всю энергию во Вселенной, то и тогда им не удалось бы найти точное значение числа π. Нетрудно понять, почему Пифагор настаивал на том, чтобы сведения о существовании столь необычных математических «зверей» оставались достоянием лишь узкого круга посвященных.

Значение числа π с более чем 1500 знаками
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582
09749445923078164062862089986280348253421170679821480865
13282306647093844609550582231725359408128481117450284102
70193852110555964462294895493038196442881097566593344612
84756482337867831652712019091456485669234603486104543266
48213393607260249141273724587006606315588174881520920962
82925409171536436789259036001133053054882046652138414695
19415116094330572703657595919530921861173819326117931051
18548074462379962749567351885752724891227938183011949129
83367336244065664308602139494639522473719070217986094370
27705392171762931767523846748184676694051320005681271452
63560827785771342757789609173637178721468440901224953430
14654958537105079227968925892354201995611212902196086403
44181598136297747713099605187072113499999983729780499510
59731732816096318595024459455346908302642522308253344685
03526193118817101000313783875288658753320838142061717766
91473035982534904287554687311595628638823537875937519577
81857780532171226806613001927876611195909216420198938095
25720106548586327886593615338182796823030195203530185296
89957736225994138912497217752834791315155748572424541506
95950829533116861727855889075098381754637464939319255060
40092770167113900984882401285836160356370766010471018194
29555961989467678374494482553797747268471040475346462080
46684259069491293313677028989152104752162056966024058038
15019351125338243003558764024749647326391419927260426992
27967823547816360093417216412199245863150302861829745557
06749838505494588586926995690927210797509302955321165344
98720275596023648066549119881834797753566369807426542527
86255181841757467289097777279380008164706001614524919217
32172147723501414419735

Когда Евклид отважился рассмотреть проблему иррациональности в десятом томе «Начал», его цель состояла в том, чтобы доказать существование числа, не представимого в виде обыкновенной дроби. Вместо того, чтобы доказывать иррациональность числа π, Евклид рассмотрел квадратный корень из двух, √2, — число, которое при умножении на себя дает число 2. Чтобы доказать, что число √2 не представимо в виде

обыкновенной дроби, Евклид воспользовался доказательством от противного и предположил, что число √2 представимо в виде обыкновенной дроби. Затем он показал, что эту гипотетическую дробь всегда можно упростить. Упрощение дроби означает, что числитель и знаменатель можно поделить на одно и то же целое число. Например, дробь 8/12 можно упростить, сократив числитель и знаменатель на 2 и превратив ее в дробь 4/6. В свою очередь, дробь 4/6 можно упростить до 2/3, а вот дробь 2/3 уже дальнейшему упрощению не поддается, почему и называется несократимой дробью. Евклид показал, что гипотетическая дробь, по предположению представляющая число √2, может быть упрощаема снова и снова бесконечное число раз, но так и не приводится к несократимому виду. Но это нелепо, так как все дроби приводимы к несократимому виду. Следовательно, гипотетическая дробь не может существовать. Это означает, что число √2 не представимо в виде дроби и, следовательно, иррационально. Ход доказательства Евклида приведен в Приложении 2.

Используя доказательство от противного, Евклид сумел доказать существование иррациональных чисел. До Евклида все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но евклидовы иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа описать число, равное квадратному корню из 2, как записав его в виде √2, поскольку его нельзя представить в виде обыкновенной дроби, а любая попытка записать √2 в виде десятичной дроби не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, 1,414213562373…

Хотя Евклид, несомненно, питал интерес к теории чисел, его величайший вклад в математику был сделан в другой области. Истинной страстью Евклида была геометрия, и из тринадцати книг, составляющих «Начала», книги I–VI посвящены планиметрии (двумерной геометрии), а книги XI–XIII — стереометрии. Этот свод геометрических знаний был настолько полным, что содержание «Начал» составляло основу программ по геометрии в школах и университетах на протяжении следующих двух тысяч лет.

Математиком, составившим подобный свод знаний по теории чисел, стал Диофант Александрийский, последний защитник греческой традиции. Хотя достижения Диофанта в теории чисел достаточно задокументированы в его книгах, по существу ничего больше об этом замечательном математике не известно. Не известно, где он родился. В Александрию Диофант мог прибыть в любое время на протяжении «окна», протяженностью в пять веков! В своих сочинениях Диофант цитирует Гипсикла, из чего можно сделать вывод, что Диофант жил после 150 года до н. э.; с другой стороны, труды самого Диофанта цитирует Теон Александрийский, из чего следует, что Диофант жил до 364 года н. э. Разумной обычно считается дата — около 250 года н. э. Достоверно известно лишь своеобразное жизнеописание Диофанта. По преданию, оно было высечено на его надгробии в виде задачи-головоломки, словно специально предназначенной любителям математики:

«Бог ниспослал ему быть мальчиком шестую часть жизни; добавив к сему двенадцатую часть, Он покрыл его щеки пушком; после седьмой части Он зажег ему свет супружества и через пять лет после вступления в брак даровал ему сына. Увы! Несчастный поздний ребенок, достигнув меры половины полной жизни отца, он был унесен безжалостным роком. Через четыре года, утешая постигшее его горе наукой о числах, он [Диофант] завершил свою жизнь».

Требовалось вычислить продолжительность жизни Диофанта. Решение этой задачи приведено в Приложении 3.

Эта головоломка может служить примером задач того рода, которые любил Диофант. Он специализировался на решении задач в целых числах. Ныне такие задачи известны под названием диофантовых. Деятельность Диофанта протекала в Александрии, он собирал известные и придумывал новые задачи, а позднее объединил их в большом труде под названием «Арифметика». Из тринадцати книг, входивших в состав «Арифметики», только шесть пережили хаос Средних веков и стали источником вдохновения для математиков

эпохи Возрождения, в том числе и для Пьера де Ферма. Остальные семь книг погибли в результате цепочки трагических событий, которые отбросили математику к временам древних вавилонян.

На протяжении столетий, разделяющих Евклида и Диофанта, Александрия продолжала оставаться интеллектуальной столицей цивилизованного мира, но весь этот период великий город находился под угрозой нападения иностранных армий. Первое крупное нападение произошло в 47 году до н. э., когда Юлий Цезарь предпринял попытку сбросить Клеопатру с трона, предав сожжению александрийский флот. Библиотека, расположенная неподалеку от гавани, сильно пострадала от пожара. Сотни тысяч книг погибли. К счастью для науки, Клеопатра по достоинству ценила значение Библиотеки и решительно вознамерилась восстановить ее в прежней славе. Марк Антоний понял, что путь к сердцу просвещенной царицы лежит через Библиотеку, и пошел маршем на Пергам. В этом городе уже была заложена своя библиотека. Правители города надеялись, что со временем она станет самым богатым книгохранилищем в мире, но Марк Антоний помешал сбыться этим надеждам, отправив все собрание книг в Египет и восстановив тем самым главенство Александрии.

На протяжении четырех следующих веков Библиотека продолжала пополнять свою коллекцию — до 389 года н. э., когда ей был нанесен первый из двух роковых ударов. Причиной обоих ударов стал религиозный фанатизм. Византийский император Феодосий приказал епископу Александрийскому Теофилу разрушить все языческие монументы. К сожалению, восстанавливая и восполняя Библиотеку, Клеопатра решила отвести под нее храм Сераписа. По приказу императора, это здание было разрушено, а «языческие» ученые, пытавшиеся спасти рукописи, накопленные за шесть веков, растерзаны толпой фанатиков. Началась мрачная эра Средних веков.

Несколько драгоценных экземпляров наиболее важных книг пережили бойню, учиненную христианами, и ученые продолжали наведываться в Александрию в поисках знания. Но в 642 году последовало нападение мусульман. На этот раз поражение потерпели христиане. На вопрос, что делать с Библиотекой, одержавший победу халиф Омар заявил, что книги, противоречащие Корану, должны быть уничтожены как вредоносные, а книги, согласующиеся с Кораном, также должны быть уничтожены как излишние. Рукописи были брошены в печи, которыми отапливались публичные бани, и греческая математика обратилась в дым. Не удивительно, что большая часть «Арифметики» Диофанта оказалась уничтоженной. Следует считать чудом, что шесть книг «Арифметики» смогли уцелеть, пережив трагедию Александрии.

Следующую тысячу лет математика на Западе пребывала в упадке, и только несколько выдающихся ученых Индии и Аравии не дали ей окончательно угаснуть. Они скопировали формулы из сохранившихся греческих математических рукописей и принялись заново придумывать для этих формул утраченные теоремы. Кроме того, они пополнили математику новыми элементами и среди прочего изобрели число нуль.

В современной математике нуль выполняет две функции. Во-первых, нуль позволяет нам различать такие числа, как 52 и 502. В системе счисления, в которой положение цифры определяет ее значение, символ 0 необходим для обозначения пустой позиции. Например, 52 означает 5 раз по десять плюс 2 раза по единице, в то время как 502 означает 5 раз по сто, 0 раз по десять и 2 раза по единице. Нуль играет решающую роль при устранении неоднозначности. Даже вавилоняне, жившие за три тысячи лет до н. э., оценили использование нуля во избежание путаницы, и греки восприняли идеи вавилонян, используя кружок, похожий на тот символ нуля, который мы используем сегодня. Однако нуль выполняет еще одну, более деликатную и значительную, функцию, которую полностью оценили лишь через несколько столетий индийские математики. Они осознали, что нуль не только позволяет заполнить пробел между значащими цифрами, но и существует сам по себе, независимо от других чисел. Так абстрактное понятие «ничего» впервые обрело свой осязаемый символ.

Современному читателю изобретение нуля может показаться тривиальным шагом, но

не следует забывать о том, что именно вторая, более глубокая функция нуля ускользнула от внимания всех древнегреческих философов, в том числе Аристотеля. По мнению Аристотеля нуль должен был быть объявлен вне закона, поскольку он нарушал единообразие других чисел: деление обыкновенного числа на нуль приводило к непостижимому результату. К VI веку индийские математики уже не заметали проблему нуля под ковер, а индийский ученый VII века Брахмагупта оказался уже настолько искушенным, что использовал деление на нуль для определения бесконечности.

В то время как Европа оставила благородный поиск истины, Индия и Аравия укрепляли знание, тайно похищенное на пепелище Александрии, и излагали его на новом, более выразительном языке. Индийские и арабские математики не только пополнили математический словарь нулем, но и заменили примитивные греческие символы и неуклюжие римские числительные общепринятой и ныне системой счисления. Последнее достижение, как и введение нуля, может показаться ничтожно малым продвижением, но попробуйте умножить CLV на DCI, и вы оцените значение этого прорыва: эквивалентная задача умножения 155 на 601 гораздо проще. Развитие любой научной дисциплины зависит от ее способности развивать свои идеи и обмениваться ими, а это в свою очередь определяется научным языком, который должен быть достаточно подробным и гибким. Идеи Пифагора и Евклида отличались большим изяществом, несмотря на грубое и неуклюжее оформление, но после перевода в арабскую символику они расцвели и принесли много плодов, породив новые и богатые понятия.

В X веке французский ученый Герберт Аврилакский перенял новую систему счисления у испанских мавров и, занимаясь преподаванием в церквах и школах по всей Европе, внедрил новую систему на Западе. В 999 году он был избран папой Сильвестром II, и это позволило ему способствовать еще большему распространению новых индо-арабских цифр. И хотя необычная эффективность новой системы счисления произвела подлинный переворот в выполнении всех счетных операций и была быстро воспринята купцами, она слабо способствовала оживлению европейской математики.

Жизненно важным, поворотным пунктом в развитии западной математики стал 1453 год, когда турки разграбили Константинополь. За прежние годы рукописи, спасенные после уничтожения Александрии, нашли убежище в Константинополе, и теперь снова оказались под угрозой уничтожения. Византийские ученые бежали на запад, прихватив с собой те тексты, которые могли унести. Пережив нападения Цезаря, епископа Теофила, халифа Омара, а теперь еще и турок, несколько драгоценных книг «Арифметики» Диофанта проделали обратный путь в Европу. Судьба распорядилась так, чтобы сочинение Диофанта оказалось на письменном столе Пьера де Ферма.

Рождение проблемы

Судебные обязанности Ферма поглощали значительную часть его времени, а те скудные часы досуга, которые все же оставались, Ферма целиком посвящал математике. Отчасти это объяснялось тем, что во Франции XVII века не поощрялись светские связи судей.

Считалось, что друзья и светские знакомые судей сами могут оказаться под судом, и тогда личные связи могут помешать осуществлению правосудия. Изолированный от остальной части высшего общества Тулузы, Ферма мог сосредоточиться на своем любимом занятии.

Фронтиспис перевода «Арифметики» Диофанта выполненного Клодом Гаспаром Баше и опубликованного в 1621 году. Эта книга во многом вдохновила Ферма на его исследования

Не сохранилось никаких документальных свидетельств того, что у Ферма был учитель

математики, который поощрял своего способного ученика. Наставником и учителем Ферма стала «Арифметика» Диофанта. В «Арифметике» теория чисел, как было принято во времена Диофанта, излагалась в виде ряда задач и их решений. В действительности Диофант развернул перед Ферма картину целого тысячелетия, заслуживающего осмысления со стороны математика. В одной «Арифметике» Ферма мог найти все, что было известно о числах благодаря трудам последователей Пифагора и Евклида. Теория чисел замерла после варварского сожжения Александрии, но Ферма преисполнился решимости возродить изучение самой фундаментальной из всех математических дисциплин.

Книга, вдохновившая Ферма, была латинским переводом «Арифметики», выполненным Клодом Гаспаром Баше де Мезириаком, считавшимся самым ученым человеком во всей Франции. Блестящий лингвист, поэт и знаток классических языков и литературы, Баше питал любовь к математическим задачам-головоломкам. Его первой публикацией был сборник занимательных задач под названием «Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres» [2]. В сборнике были задачи о переправах через реку, переливании жидкостей и несколько фокусов с отгадыванием задуманного числа. Одна из задач ставила вопрос о подборе гирь: «Каков наименьший набор гирь, который позволит взвесить любой груз весом от 1 до 40 кг?»

Баше нашел остроумное решение задачи, показывающее, что удовлетворить ее требованиям можно, располагая набором всего лишь из четырех гирь. Решение Баше приводится в Приложении 4.

Хотя Баше был в математике всего лишь дилетантом, его интерес к задачам-головоломкам был настолько велик, что позволил ему осознать: задачи, приведенные в «Арифметике» Диофанта, — не просто головоломки и требуют более глубокого изучения. Баше поставил перед собой задачу перевести труд Диофанта и опубликовать его с тем, чтобы вдохнуть в методы греческих математиков новую жизнь. Следует иметь в виду, что подавляющее большинство достижений древних математиков было полностью забыто. Высшую математику не изучали даже в самых крупных европейских университетах, и только благодаря таким ученым, как Баше, она стала быстро возрождаться. Публикация в 1621 году выполненного Баше латинского перевода «Арифметики» Диофанта была его вкладом в начало второго золотого века в истории математики.

В «Арифметике» собраны сотни задач, и каждую из них Диофант снабдил подробным решением. Ферма не перенял столь высокий уровень доступности. Его совсем не интересовало создание учебника для будущих поколений. Он жаждал лишь одного — получить удовлетворение от решенной им задачи. Изучая задачи и решения Диофанта, Ферма черпал в них вдохновение и стал помышлять о том, чтобы самому заняться решением аналогичных и более тонких задач. Ферма записывал для себя лишь самое необходимое для того, чтобы убедиться в правильности полученного решения, и не заботился о том, чтобы изложить остальную часть доказательства. Чаще всего сделанные им торопливые записи отправлялись прямиком в мусорную корзину, после чего Ферма спокойно переходил к следующей задаче. К счастью для нас, опубликованный Баше латинский перевод «Арифметики» имел широкие поля, и иногда Ферма торопливо записывал на них ход своих рассуждений и свои комментарии. Эти заметки на полях стали бесценными, хотя и несколько отрывочными, документальными свидетельствами некоторых наиболее блестящих выкладок Ферма.

Одно из открытий Ферма касается так называемых дружественных чисел, тесно связанных с совершенными числами, так восхитившими Пифагора двумя тысячами лет раньше. Дружественными числами называются два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа. Пифагорейцы совершили необычайное открытие, установив, что

[2] Задачи занимательные и приятные, связанные с числами. (*фр.*)

220 и 284 — дружественные числа. Делителями числа 220 служат числа 1, 2, 4,5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, а их сумма равна 284. С другой стороны, делителями числа 284 служат числа 1, 2, 4, 71, 142; их сумма равна 220.

Пару чисел 220 и 284 стали считать символом дружбы. Мартин Гарднер в книге «Математические новеллы» [3] рассказывает о том, что в Средние века имели хождение талисманы с выгравированными на них числами 220 и 284, якобы способствующими укреплению любви. Некий арабский нумеролог сообщает об обычае вырезать числа 220 и 284 на плодах, один из которых влюбленный съедал сам, а другой давал съесть предмету своей страсти, как своего рода математическое средство усиления любовного влечения. Первые теологи отмечали, что в Книге Бытия Иаков отдает в подарок брату своему Исаву 220 животных — «двести коз, двадцать козлов». По мнению теологов, число животных, равное одному из чисел, образующих дружественную пару, свидетельствует о любви Иакова к Исаву.

Помимо 220 и 284 других дружественных чисел не было известно вплоть до 1636 года, когда Ферма обнаружил пару 17 296 и 18 416. И хотя это открытие нельзя назвать важным, оно свидетельствует о том, что Ферма хорошо знал натуральные числа и любил «играть» с ними. Ферма стал своего рода законодателем моды на нахождение дружественных чисел. Декарт открыл третью пару (9 363 584 и 9 437 056), а Леонард Эйлер продолжил список дружественных чисел до 62-й пары. Интересно отметить, что Декарт и Эйлер «проглядели» гораздо меньшую пару дружественных чисел. В 1866 году шестнадцатилетний итальянец, тезка великого скрипача, Никколо Паганини открыл пару 1184 и 1210.

В XX веке математики обобщили понятие дружественных чисел и занялись поиском так называемых «общительных» чисел — замкнутых циклов из трех и более чисел. Например, в тройке чисел

(1 945 330 728 960; 2 324 196 638 720; 2 615 631 953 920)

делители первого числа в сумме дают второе число, делители второго в сумме дают третье число, а делители третьего числа в сумме дают первое число. Самый длинный из известных циклов состоит из 28 общительных чисел, первое из которых равно 14 316.

Хотя открытие новой пары дружественных чисел сделало Ферма своего рода знаменитостью, его репутация выросла еще больше благодаря серии решенных им трудных задач.

Например, Ферма заметил, что число 26 «стиснуто» между числами 25 и 27, одно из которых представляет собой квадрат ($25 = 5^2 = 5 \cdot 5$), а другое — куб ($27 = 3^3 == 3 \cdot 3 \cdot 3$). Ферма занялся поиском других чисел, зажатых между квадратом и кубом, но найти ничего так и не удалось. Родилось подозрение, что число 26 единственное. После многодневных напряженных поисков Ферма удалось выстроить сложное доказательство, не оставлявшее сомнений в том, что 26 — действительно единственное число, заключенное между квадратом и кубом. Предложенная им цепочка логических доводов убедительно свидетельствовала, что ни одно другое число не обладает этим свойством.

Ферма сообщил об уникальном свойстве числа 26 математическому сообществу и бросил вызов, предложив доказать это. Ферма открыто признал, что располагает доказательством установленного им свойства. Вопрос был в том, хватит ли у других математиков сообразительности, чтобы справиться с предложенной задачей? Несмотря на простоту формулировки, решение задачи (доказательство утверждения) оказалось чрезвычайно трудным — можно сказать, недружественным по отношению к тем, кто пытался найти его, и Ферма доставляло особое удовольствие подтрунивать над английскими математиками Валлисом и Дигби, которые в конце концов были вынуждены признать свое поражение.

---

[3] Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974; гл. 28 «Краткий трактат о бесполезной красоте совершенных чисел».

События развивались так, что величайшей «заявкой» Ферма на непреходящую славу оказался еще один вызов, брошенный им всему остальному миру. Но это была случайная задача-головоломка, не предназначавшаяся для публичного обсуждения.

Заметка на полях

При чтении II-й книги «Арифметики» Ферма наткнулся на целую серию наблюдений, задач и решений, связанных с теоремой Пифагора и пифагоровыми тройками. Например, Диофант рассматривал существование особых троек, образующих так называемые «хромые треугольники», у которых две более короткие стороны x и y отличаются по длине только на единицу (например, $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$ и 202 + 212 = 292).

Ферма был поражен разнообразием и обилием пифагорейских треугольников. Он знал, что за много веков до него Евклид доказал (общий ход предложенного Евклидом доказательства см. в Приложении 5), что число пифагоровых троек бесконечно велико. Возможно, Ферма просматривал в очередной раз подробное изложение теории пифагоровых троек у Диофанта и прикидывал, нельзя ли сказать что-нибудь новое по этому поводу. Записывая то так, то эдак уравнение Пифагора, Ферма все старался заметить нечто такое, что ускользнуло от древних греков. Внезапно ему пришла в голову гениальная мысль, обессмертившая имя «князя любителей»: Ферма придумал уравнение, очень похожее на уравнение Пифагора, но не имевшее ни одного решения в целых числах! Именно об этом уравнении и узнал десятилетний Эндрю Уайлс, заглянув в книгу Белла, взятую в публичной библиотеке на Милтон-роуд.

Вместо уравнения Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ Ферма занялся рассмотрением его варианта $x^3 + y^3 = z^3$. Ферма всего лишь изменил степень на единицу, но его новое уравнение, насколько можно было судить, вообще не допускало никаких решений в целых числах. «Методом проб и ошибок» нетрудно было обнаружить, что найти два куба, которые бы в сумме давали еще один куб, не так-то просто. Неужели произведенное Ферма незначительное изменение действительно превращает уравнение, допускающее бесконечно много решений в целых числах, в уравнение, не имеющее ни одного решения в целых числах?

Ферма подверг уравнение Пифагора еще большему изменению, попробовав заменить степень 2 на целые числа бóльшие 3, и обнаружил, что найти решение в целых числах каждого из этих уравнений столь же трудно. И Ферма решил, что вообще не существует трех целых чисел x, y, z, которые удовлетворяли бы уравнению

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n}, \text{ где } \mathbf{n = 3,4,5\ldots}$$

На полях «Арифметики» Диофанта, рядом с задачей 8, Ферма оставил такое замечание: «Cubet autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere» [4].

Фронтиспис издания «Арифметики» Диофанта опубликованного Клеманом-Самюэлем Ферма в 1670 году. В этом варианте были напечатаны и заметки на полях, оставленные отцом издателя — Пьером де Ферма

---

[4] Невозможно для куба быть записанным в виде суммы двух кубов, или для четвертой степени быть записанной в виде суммы двух четвертых степеней, или, в общем, для любого числа, которое есть степень больше двух, быть записанной в виде суммы двух таких же степеней. (*лат.*)

Рис. 6. Страница издания «Арифметики» Диофанта (1670 г.), содержащая знаменитое замечание Пьера де Ферма

Не было причин, по которым среди всех целых чисел не должно было бы существовать по крайней мере одной тройки целых чисел, удовлетворяющих уравнениям Ферма, тем не менее Ферма утверждал, что во всем бесконечном мире чисел нет ни одной «тройки Ферма». Утверждение было весьма необычным, но Ферма полагал, что располагает его доказательством. После первой заметки на полях, наметившей общие контуры теории, гений, любящий позабавиться над коллегами-математиками, начертал еще один комментарий, над которым впоследствии ломало голову не одно поколение математиков:

«Cuius rei demonstrationem mirabilem sane setex hanc marginis exiguitas non caparet» [5]. В этом — весь Ферма, все то, что особенно раздражало современных ему математиков. Из его собственных слов можно заключить, что он весьма доволен своим «поистине удивительным» доказательством, но ему и в голову не приходит дать себе труд написать подробности доказательства и уж тем более опубликовать его. Он так никому и не рассказал о своем доказательстве, но, несмотря на характерную для Ферма комбинацию лени и скромности, Великая теорема Ферма, как ее стали называть позднее, обрела неслыханную славу в грядущих веках.

Великая проблема, наконец, опубликована

Свое знаменитое открытие Ферма совершил в самом начале своей математической карьеры — около 1637 года. Примерно через тридцать лет, исполняя свои судебные обязанности в городе Кастре, Ферма тяжело заболел. 9 января 1665 года он подписал свой последний приговор и тремя днями позднее умер. Открытиям Ферма, все еще находившегося в изоляции от парижской математической школы и отнюдь не добрым словом поминаемого его разочарованными коллегами, грозило полное забвение. К счастью, старший сын Ферма, Клеман-Самюэль, сознававший все значение любимого увлечения отца, пришел к заключению, что его открытия не должны быть потеряны для всего мира. Всем, что мы знаем о замечательных открытиях Ферма в теории чисел, мы обязаны его сыну, и если бы не Клеман-Самюэль, загадка, известная под названием Великой теоремы Ферма, умерла бы вместе во своим создателем.

Пять лет Клеман-Самюэль собирал отцовские заметки и письма, изучал неразборчивые надписи на полях «Арифметики». Заметка на полях с формулировкой Великой теоремы Ферма была лишь одной из вдохновенных мыслей, начертанных на полях этой книги. Клеман-Самюэль взял на себя тяжкий труд опубликовать все эти заметки в специальном издании «Арифметики». В 1670 году он издал в Тулузе книгу под названием «Диофантова Арифметика, содержащая примечания П. де Ферма». В нее наряду с оригинальным текстом на древнегреческом языке и латинском переводом Баше вошли 48 примечаний, сделанных Ферма. Примечание, воспроизведенное на рис. 6, и было тем, которое стало впоследствии известно под названием Великой теоремы Ферма.

Когда «Примечания» Ферма стали известны более широкому научному сообществу, все поняли, что письма, которые он отправлял своим коллегам, были лакомыми кусочками из сказочного сокровища открытий. Примечания, сделанные рукой Ферма, содержат целую серию теорем. К сожалению, они были либо полностью лишены объяснений, либо сопровождались небольшим наброском доказательства. Часто в этих обрывках доказательств было достаточно изящных логических ходов, чтобы у математиков не оставалось сомнения в том, что Ферма располагал доказательствами. Что же касалось восполнения деталей, то оно

---

[5] Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки для того, чтобы вместить его. (*лат.*)

всегда было вызовом, который математикам приходилось принимать.

Леонард Эйлер, один из величайших математиков XVIII века, предпринял попытку доказать одно из самых изящных примечаний Ферма — теорему о простых числах. Простым называется число, которое не имеет делителей — чисел, которые делили бы его без остатка, — кроме единицы и самого числа. Например, 13 — простое число, а 14 — не простое. Ни одно число не делит 13 без остатка, а 2 и 7 делят 14. Все простые числа подразделяются на числа, представимые в виде $4n+1$, и числа, представимые в виде $4n-1$, где n — некоторое целое число. Так, число 13 принадлежит к первой группе ($13 = 4\cdot3 + 1$), а число 19 — ко второй группе ($19 = 4\cdot5-1$). Теорема Ферма о простых числах утверждает, что простые числа первой группы всегда представимы в виде суммы двух квадратов ($13 = 2^2 + 3^2$), в то время как простые числа второй группы никогда в виде суммы двух квадратов не представимы ($19 =?^2 +?^2$). Это свойство простых чисел формулируется изящно и просто, но все попытки доказать, что им обладает любое простое число, наталкиваются на значительные трудности. Для Ферма это доказательство было всего лишь одним из многих доказательств, хранимых им «приватно», для Эйлера восстановить доказательство стало делом чести. В 1749 году, после семи лет работы и почти через сто лет после смерти Ферма, Эйлеру удалось доказать эту теорему о простых числах.

В сокровищнице полученных Ферма результатов встречаются различные теоремы — от фундаментальных до чисто занимательных. Математики судят о важности теоремы по тому, какое влияние она оказывает на остальную математику. Во-первых, теорема считается важной, если она представляет собой некую универсальную истину, то есть если она верна для всей группы чисел. В случае теоремы Ферма о простых числах, теорема верна не только для некоторых простых чисел, а для всех простых чисел. Во-вторых, важная теорема должна раскрывать какую-нибудь более глубоко лежащую истину об отношениях между числами. Теорема может быть трамплином для создания целого сонма других теорем и даже стимулом для развития новых областей математики. Наконец, теорема считается важной, если существование целых областей исследования может оказаться под угрозой из-за отсутствия одного-единственного логического звена. Многие математики исходили бессильными слезами при мысли, что могли бы получить важный результат, если бы могли восстановить одно недостающее звено в цепочке логических рассуждений.

Поскольку математики используют теоремы как ступени, ведущие к другим результатам, было чрезвычайно важно доказать каждую из анонсированных Ферма теорем. Использовать Великую теорему только потому, что, по утверждению Ферма, он располагал ее доказательством, было невозможно. Прежде чем пустить Великую теорему в дело, ее необходимо было доказать со всей строгостью, иначе последствия могли быть самыми ужасными. Например, представьте себе математиков, которые приняли одну из теорем Ферма на веру. Эта теорема была бы включена ими как отдельный элемент в целую серию других, более обширных, доказательств. Со временем эти более обширные доказательства были бы включены в еще более обширные доказательства, и т. д. В результате появились бы сотни теорем, которые бы опирались на истинность той самой недоказанной, принятой на веру, теоремы. Но что если Ферма ошибся, и недоказанная теорема в действительности ложна? Все теоремы, в доказательствах которых была бы использована ложная теорема, также оказались бы ошибочными, и огромные разделы математики рухнули бы. Теоремы — фундамент математики: если истинность теорем установлена, то, опираясь на них, можно возводить, пребывая при этом в полной безопасности, новые теоремы. Необоснованные (недоказанные) идеи имеют бесконечно меньшую ценность и называются гипотезами. Любая логика, опирающаяся на гипотезу, сама гипотетична.

Ферма утверждал, что располагает доказательством любого из своих примечаний, поэтому для него все они были теоремами. Но до тех пор, пока математическое сообщество в целом не восстановит каждое доказательство, все утверждения, содержащиеся в примечаниях, рассматриваются лишь как гипотезы. На протяжении последних 350 лет Великую теорему Ферма правильнее было бы называть Великой гипотезой Ферма.

За прошедшие столетия одно за другим были доказаны все утверждения Ферма, содержавшиеся в примечаниях на полях «Арифметики» Диофанта, и только Великая теорема Ферма упорно не поддавалась усилиям математиков. Ее даже стали называть «последней теоремой Ферма», так как она осталась последним его примечанием, которое требовалось доказать. Триста лет все попытки найти ее доказательство одна за другой терпели поражение. Великая теорема ферма обрела известность как самая трудная «головоломка» математики. Но всеми признанная трудность проблемы не обязательно означает, что Великая теорема Ферма важна в том смысле, в каком это понимается выше. Великая теорема Ферма, по крайней мере вплоть до самого последнего времени, не удовлетворяла нескольким критериям: казалось, что если бы ее удалось доказать, то это не привело бы ни к какому сколько-нибудь заметному прогрессу в развитии теории чисел и не способствовало бы доказательству других гипотез.

Слава Великой теоремы Ферма обусловлена исключительно тем, что доказать ее необычайно трудно. Есть и еще один дополнительный стимул: «князь любителей» заявил, что располагает доказательством этой теоремы, над восстановлением которой с тех пор ломали голову поколения профессиональных математиков. Небрежные замечания Ферма на полях принадлежавшего ему экземпляра «Арифметики» Диофанта читались как вызов всему миру. Ферма доказал свою Великую теорему, удастся ли какому-нибудь математику превзойти или сравняться с ним по блеску ума?

Г.Г. Харди обладал весьма своеобразным чувством юмора. Как-то раз он задумался, что в математическом наследии прошлого могло бы сравниться с Великой теоремой Ферма по тщетности всех попыток найти доказательство. К найденному им аналогу Великой теоремы Ферма Харди обращался всякий раз, когда ему приходилось преодолевать страх перед морскими путешествиями. Для него это было своего рода страхованием от несчастного случая. Если Харди предстояло пересечь Атлантический океан на борту лайнера, он предварительно посылал кому-нибудь из коллег телеграмму следующего содержания:

> ДОКАЗАЛ ГИПОТЕЗУ РИМАНА ТЧК ПОДРОБНОСТИ ПО ВОЗВРАЩЕНИИ ТЧК

Гипотеза Римана — проблема, которой математика «больна» с XIX века. Логика Харди состояла в том, что Бог не даст ему утонуть потому, что тогда математики устремились бы в погоню за еще одним неуловимым призраком.

Великая теорема Ферма — задача невероятно трудная, и тем не менее ее можно сформулировать так, что она станет понятной даже школьнику. Ни в физике, ни в химии, ни в биологии нет ни одной проблемы, которая формулировалась бы так просто и определенно и оставалась нерешенной так долго. В своей книге «Великая проблема» Э.Т. Белл высказал предположение, что возможно, наша цивилизация подойдет к концу прежде, чем удастся доказать Великую теорему Ферма. Доказательство Великой теоремы Ферма стало самым ценным призом в теории чисел, и поэтому не удивительно, что поиски его привели к некоторым наиболее захватывающим эпизодам в истории математики. В эти поиски оказались вовлеченными величайшие умы на нашей планеты, за доказательство назначались огромные премии. Из-за Великой теоремы Ферма люди дрались на дуэли, а некоторые, отчаявшись найти доказательство, даже кончали с собой.

Статус Великой головоломки вышел за рамки замкнутого мира математики. В 1958 году Великая теорема Ферма проникла даже в легенду о Фаусте. В сборнике «Как иметь дело с дьяволом» была опубликована новелла Артура Порджеса «Дьявол и Саймон Флэгг». В ней дьявол обращается к профессору математики Саймону Флэггу с предложением задать ему, дьяволу, какой-нибудь вопрос. Если дьяволу удастся найти ответ за двадцать четыре часа, то он получает душу Саймона. В случае неудачи дьявол обязуется уплатить Саймону 100000 долларов. Саймон задает дьяволу вопрос: «Верна ли Великая теорема Ферма?» Дьявол исчезает и носится по свету, собирая по крохам все достижения математики. На

следующий день он возвращается и признает свое поражение: «Вы выиграли, Саймон, — сказал дьявол, почтительно глядя на профессора. — Даже мне не под силу выучить всю математику, которая необходима для решения столь трудной задачи за столь короткое время. Чем глубже я погружаюсь в проблему, тем труднее она становится. Неединственное разложение на множители, идеальные числа… Да что зря говорить! Знаете, — признался дьявол, — даже самые лучшие математики на других планетах, а они, должен вам сказать, намного опередили ваших, не решили ее. Взять хотя бы того парня на Сатурне, что очень похож на гриб на ходулях. Он в уме решает дифференциальные уравнения в частных производных. Так даже он не справился с этой задачей».

Глава 3. Позор математики

Математика — не церемониальный марш по гладкой дороге, а путешествие по незнакомой местности, где исследователи часто рискуют заблудиться. Строгость должна стать указанием для историка о том, что данная местность нанесена на карту, а настоящие исследователи отправились дальше.

У.С. Энглин

«С тех пор, как я еще мальчиком впервые столкнулся с Великой теоремой Ферма, она стала моим увлечением на всю жизнь, — вспоминает Эндрю Уайлс, и его дрогнувший голос выдает тот трепет, с которым он относится к этой задаче. — Я обнаружил, что эта проблема оставалась нерешенной на протяжении трех столетий. Не думаю, чтобы многие из моих школьных друзей подхватили математическую лихорадку, поэтому я не стал обсуждать проблему Ферма с моими одногодками. Но мой учитель математики сам занимался исследованиями, и он дал мне книгу по теории чисел, из которой я почерпнул кое-какие указания относительно того, как приступить к решению проблемы. Прежде всего я решил (и принял это в качестве исходной гипотезы), что Ферма не мог знать намного больше математики, чем я. И я попытался найти его утерянное доказательство, используя те разделы математики, которые мог использовать он сам».

Уайлс был наивным ребенком, преисполненным честолюбивых замыслов, который мечтал достичь успеха там, где потерпели неудачу поколения математиков. Кому-нибудь другому такое намерение могло бы показаться глупой мечтой, но юный Эндрю был совершенно прав, полагая, что он, двенадцатилетний школьник, живущий в XX веке, знает математику в ничуть не меньшем объеме, чем Пьер де Ферма — гений, живший в XVII веке. В своей наивности он действительно мог наткнуться на доказательство, которое пропустили Другие, более искушенные, математики.

Но, несмотря на весь энтузиазм Эндрю, все его попытки доказать Великую теорему Ферма неизменно оканчивались неудачей.

Изрядно поломав голову и подробнейшим образом изучив школьные учебники, он не сумел добиться ничего. После года бесплодных поисков Эндрю решил изменить стратегию и попытаться извлечь что-нибудь полезное для себя из ошибок известных математиков. История Великой теоремы Ферма была необычайно романтичной. Много людей размышляли над ней, и не один великий математик в прошлом пытался доказать ее и потерпел неудачу, отчего Великая проблема становилась все большим вызовом и все большей тайной. «Многие математики XVIII и XIX веков. пытались самыми различными способами доказать Великую теорему Ферма, и я, мальчишка, решил изучить все эти методы и понять, что делали великие математики прошлого».

Юный Уайлс принялся изучать методы всех, кто когда-либо делал серьезную попытку доказать Великую теорему Ферма. И начал он с изучения трудов одного из наиболее плодовитых математиков в истории, которому удалось осуществить первый прорыв в битве с Великой теоремой Ферма.

Математик-циклоп

Создание математики — занятие мучительное и таинственное. Объект доказательства часто бывает ясен, но путь к доказательству теряется в тумане, и математик бредет наощупь, производя выкладки и опасаясь, что каждый шаг может увлечь ход рассуждений в совершенно неверном направлении. Кроме того, всегда существует возможность того, что пути к доказательству вообще не существует. Решив, что некоторое утверждение истинно, математик может годами пытаться доказать его, хотя в действительности это утверждение ложно. По существу, математик в этом случае пытается доказать невозможное.

За всю историю математики лишь горстке математиков удалось избежать такого рода сомнений, которые страшили их коллег. Возможно, наиболее известным из математиков, не ведающих страха и упрека, был живший в XVIII веке математический гений Леонард Эйлер. Именно ему удалось совершить первый крупный прорыв к доказательству Великой теоремы Ферма. Эйлер обладал столь невероятной интуицией и такой обширной памятью, что, по преданию, мог держать в голове весь объем производимых вычислений, не прикасаясь пером к бумаге. Вся Европа называла его «прирожденным аналитиком», а французский академик Франсуа Араго сказал о нем: «Эйлер вычислял без видимых усилий, как люди дышат или как орлы парят в поднебесье».

Леонард Эйлер родился в Базеле в 1705 году в семье кальвинистского пастора Пауля Эйлера. Хотя юный Эйлер проявил недюжинный математический талант, его отец решил, что сын должен изучать теологию, и готовил ему церковную карьеру. Леонард повиновался отцовской воле и стал изучать теологию и древнееврейский язык в Базельском университете.

К счастью для Эйлера, Базель был родиной знаменитого клана Бернулли. Бернулли могли бы с полным основанием претендовать на звание самого математического рода: восемь представителей семьи Бернулли принадлежали к числу самых выдающихся умов Европы на протяжении всего лишь трех поколений. Говорили, что семья Бернулли стала для математики тем же, чем семья Баха была для музыки. Слава рода Бернулли распространилась за пределы математического сообщества, и одна легенда ярко рисует «профиль» семейства. Однажды Даниил Бернулли путешествовал по Европе и вступил в беседу с незнакомцем. Спустя какое-то время он скромно представился своему собеседнику: «Я — Даниил Бернулли». «А я, — саркастически ответил тот, — Исаак Ньютон». Даниил охотно вспоминал этот случай несколько раз, считая его самым искренним признанием своих заслуг, которое ему когда-либо довелось получать.

Даниил и Николай Бернулли были близкими друзьями Леонарда Эйлера, и они первыми поняли, что на их глазах происходит превращение блестящего математика в самого заурядного теолога. Они обратились к Паулю Эйлеру и упросили его разрешить Леонарду оставить теологию ради чисел. Эйлер-старший сам в прошлом изучал математику у старшего Бернулли, Якоба, и испытывал к семье Бернулли глубочайшее почтение. С большой неохотой Пауль Эйлер был вынужден признать, что его сын рожден не для молитв, а для вычислений.

Вскоре Леонард Эйлер покинул Швейцарию, сменив родной Базель на дворцы Берлина и Санкт-Петербурга, где он и провел бóльшую часть своей творческой жизни. В эпоху Ферма математиков считали любителями жонглировать числами, но к началу XVIII века их уже рассматривали как профессиональных «решателей задач». Культура чисел резко изменилась, и произошло это отчасти благодаря сэру Исааку Ньютону и его научным результатам.

Ньютон полагал, что математики лишь впустую тратят время, поддразнивая друг друга пустыми и никчемными задачами-головоломками. Вместо этого он вознамерился применять математику к физическому миру и вычислять все, что только можно, — от орбит планет до траекторий пушечных ядер. К тому времени, когда Ньютон умер (это произошло в

1727 году), в Европе произошла научная революция. В тот же год Эйлер опубликовал свою первую работу. И хотя она содержала изящные и свежие математические идеи, ее главная цель состояла в описании решения одной технической проблемы, связанной с постановкой мачт на парусных кораблях.

Европейские державы не были заинтересованы в использовании математики для изучения эзотерических и абстрактных понятий; математика была им необходима для решения практических проблем, и правительства состязались в привлечении к себе на службу лучших умов. Эйлер начал свою математическую карьеру в России, затем его пригласил в Берлинскую академию король Пруссии Фридрих Великий. В царствование Екатерины Великой Эйлер вернулся в Россию, где он и провел последние годы жизни. За годы своей деятельности Эйлер решил множество задач из самых различных областей — от навигации до финансов, от акустики до ирригации. Практический мир решения насущных проблем не притупил математические способности Эйлера. Наоборот, для решения каждой новой проблемы Эйлер изобретал новый остроумный математический подход. Столь «односторонняя» направленность его ума приводила к тому, что в иной день Эйлеру случалось писать по несколько работ. Рассказывают, что между первым и вторым приглашением к обеденному столу Эйлер как-то раз попытался выполнить вычисления, заслуживающие публикации. Эйлер не терял ни минуты. Укачивая одной рукой младенца в колыбели, он другой рукой набрасывал доказательство теоремы.

Одним из величайших достижений Эйлера стала разработка алгоритмического мышления. Отличительная особенность эйлеровских алгоритмов состояла в том, что они предназначались для решения проблем, казавшихся неразрешимыми. Одной из таких проблем было высокоточное предсказание фаз Луны — информация о фазах Луны имела жизненно важное значение для составления таблиц, необходимых для мореплавания. Еще Ньютон показал, что можно сравнительно легко предсказывать орбиту одного тела, обращающегося вокруг другого, но в случае Луны ситуация не столь проста.

Луна обращается вокруг Земли, но третье тело — Солнце — существенно усложняет картину. Земля и Луна притягивают друг друга, а Солнце возмущает положение Земли и сталкивает Луну с ее идеальной орбиты вокруг Земли. Уравнения позволяли описать поведение Земли и Луны, но математики XVIII века не умели учитывать в своих вычислениях влияние третьего тела. Даже сегодня невозможно предсказать, как будет вести себя точное решение этой задачи (класс таких задач называется «задачей трех тел»). Эйлер понял, что мореплавателям нет необходимости знать фазу Луны с абсолютной точностью — вполне достаточно такой точности, которая позволяет определить положение судна с точностью до нескольких морских миль. И он разработал рецепт, позволяющий получать не идеальное, а достаточно точное решение. Такой рецепт, называемый алгоритмом, позволяет получить сначала весьма приближенное, грубое решение. Затем это решение можно ввести в качестве исходных данных в тот же алгоритм и получить уже более точное решение. В свою очередь, уточненное решение, если его также ввести в алгоритм, порождает еще более точное решение, и т. д. После ста или около того итераций Эйлер получил возможность определить положение Луны с точностью, достаточной для нужд мореплавания. Свой алгоритм Эйлер представил британскому Адмиралтейству и получил награду в триста фунтов стерлингов.

Эйлер заслужил репутацию человека, способного решить любую поставленную ему задачу, причем не только математическую. В бытность свою при дворе Екатерины Великой он встретил великого французского философа Дени Дидро. Тот был убежденным атеистом и пытался обратить в атеизм представителей русской знати. Разгневанная этим Екатерина обратилась к Эйлеру с просьбой пресечь деятельность французского безбожника.

Эйлер поразмыслил над просьбой императрицы и объявил, что располагает алгебраическим доказательством существования Бога. Екатерина Великая пригласила Эйлера и Дидро во дворец и собрала на теологический спор всех придворных. Эйлер встал перед аудиторией и заявил:

«Сир! $(a + b^n)/n = x$, следовательно Бог существует. Что Вы имеете возразить?»

Дидро не был силен в алгебре и не мог ничего возразить величайшему математику Европы. Ему оставалось только безмолвствовать. Потерпев унизительное поражение, он покинул Санкт-Петербург и вернулся в Париж. Эйлер же на какое-то время вернулся к занятиям теологией и опубликовал еще несколько шутливых доказательств относительно природы Господа Бога и человеческого духа.

Более «земная» задача, привлекшая внимание Эйлера, большого любителя головоломных проблем, связана с прусским городом Кёнигсбергом (ныне — российский город Калининград). Город стоит на берегах реки Прегили и состоит из четырех частей, соединенных между собой семью мостами. План города схематически изображен на рис. 7. Некоторые из любопытных жителей Кенигсберга заинтересовались, можно ли обойти все семь мостов, не переходя ни по одному из них дважды. Кое-кто из обитателей Кенигсберга попытался проложить различные маршруты, но ничего хорошего из этого не вышло. Эйлеру также не удалось обойти все семь кёнигсбергских мостов, побывав на каждом только один раз, но зато он сумел объяснить, почему сделать это невозможно.

Рис. 7. Река Прегиль делит Кёнигсберг на четыре несвязанные части A, B, C и D. Различные части города соединены между собой семью мостами. Можно ли обойти все семь мостов побывав на каждом один и только один раз?

Рис. 8. Упрощенная схема семи кёнигсбергских мостов

Эйлер взял план города и заменил его упрощенной схемой, на которой части города изображены точками (узлами), а мосты — линиями (ребрами), как на рис. 8. Затем Эйлер стал рассуждать так. Чтобы существовал маршрут, позволяющий обойти ровно по одному разу все мосты, каждая точка на схеме должна принадлежать четному числу линий. Это связано с тем, что в середине обхода путешественник, проходя какую-то из частей города, должен войти в нее по одному мосту, а выйти — по другому. Из этого правила существуют лишь два исключения: когда путешественник начинает или завершает обход. В самом начале обхода путешественник покидает некую часть города, и для выхода из нее необходим только один-единственный мост. Если обход начинается и заканчивается в различных частях города, то число мостов, ведущих к каждой из них нечетно. Но если обход начинается и заканчивается в одной и той же части города, то соответствующая ей точка на схеме, как и все другие точки, должна принадлежать четному числу линий (т. е. эта часть города должна быть соединена с другими частями четным числом мостов).

Таким образом, заключил Эйлер, какой бы ни была сеть мостов, обойти все мосты, побывав на каждом по одному и только одному разу, можно только в том случае, если все части города соединены с другими четным числом мостов или если ровно две части города соединены с другими частями нечетным числом мостов. В Кенигсберге город подразделяется всего на четыре части, — и все они соединены с другими частями нечетным числом мостов. На схеме Кенигсберга три точки принадлежат трем линиям, а одна — пяти линиям. Тем самым Эйлер не только сумел объяснить, почему все семь кёнигсбергских мостов невозможно обойти, побывав на каждом один и только один раз, но и придумал правило, применимое к любой сети мостов в любом городе мира. Рассуждения Эйлера отличаются замечательной красотой. По-видимому, такого сорта логические задачи Эйлер и любил решать за обедом.

Задача о семи кёнигсбергских мостах принадлежит к числу так называемых задачах о графах в прикладной математике. Именно она побудила Эйлера к рассмотрению более

абстрактных графов. В ходе своих исследований Эйлер открыл фундаментальную истину, относящуюся ко всем графам, — так называемую формулу Эйлера для графов, которую ему удалось доказать за несколько логических шагов. Формула Эйлера для графов выражает незыблемое соотношение между тремя элементами любой графа:

$$\boldsymbol{V — R + L = 1,}$$

где

V — число вершин (узлов, или пересечений) в графе,

R — число линий (ребер) в графе,

L — число замкнутых областей в графе.

Таким образом, по утверждению Эйлера, если к числу вершин любого графа прибавить число замкнутых областей и вычесть число его ребер — результат всегда окажется равен единице. Например, все графы на рис. 9 удовлетворяют формуле Эйлера.

Вершины = 4
Области = 3
Линии = 6

Вершины = 6
Области = 1
Линии = 6

Вершины = 5
Области = 10
Линии= 6

Рис. 9. Различные графы, удовлетворяющие формуле Эйлера

Рис. 10. Эйлер доказал свою формулу для графов, продемонстрировав, что она выполняется для простейшего графа, а затем показав, что формула остается верной при любых «дополнениях» к единственной вершине

Можно проверить формулу Эйлера на целой серии графов, и всякий раз она оказывается верной; возникает искушение предположить, что формула Эйлера верна для всех графов. И хотя такой проверки было бы достаточно для физической теории, для обоснования математической теории ее совершенно недостаточно. Единственный способ показать, что формула Эйлера остается в силе для любого мыслимого графа, — построить безупречное с точки зрения логики доказательство. Именно так и поступил Эйлер.

Свое доказательство Эйлер начал с простейшего из графов — с графа, состоящего из одной единственной вершины (рис. 10a). Ясно, что для такого графа формула Эйлера верна: имеется всего одна вершина, линий и областей нет, поэтому

$\boldsymbol{V + R — L = 1 + 0–0 = 1}$.

Затем Эйлер рассмотрел вопрос о том, что произойдет в том случае, если он что-нибудь добавит к этому простейшему графу. Любое добавление к нему требует добавления линии. Любая линия может соединять существующую вершину либо с самой собой, либо с какой-нибудь новой вершиной.

Во-первых, рассмотрим случай, когда дополнительная линия соединяет существующую

вершину с самой собой. Как видно из рис. 10*б* , при добавлении линии в этом случае добавляется также новая область. Следовательно, формула Эйлера для графов остается в силе, так как добавление одной области (+) компенсируется добавлением одной линии (—). При добавлении новых линий того же типа формула Эйлера для графов также останется в силе, так как каждая новая линия порождает новую область.

Во-вторых, рассмотрим, что произойдет, если дополнительная линия соединит существующую вершину с новой вершиной, как на рис. 10*в* . И в этом случае формула Эйлера остается в силе, так как новая вершина (+) компенсирует новую линию (—). При добавлении новых линий того же типа формула Эйлера также остается в силе, поскольку каждая дополнительная линия рассматриваемого типа заканчивается в новой вершине.

Вот и все, что требовалось Эйлеру для его доказательства. Он рассуждал так. Формула верна для простейшего из всех графов — одной-единственной вершины. Все остальные графы, сколь бы сложными они ни были, могут быть построены из простейшего путем прибавления линий — по одной линии за один раз. Всякий раз при добавлении к графу новой линии формула остается верной, потому что вместе с линией добавляется либо новая вершина, либо новая область, и тем самым компенсируется добавление линии. Эйлер разработал простую, но мощную стратегию. Он доказал, что его формула верна для простейшего графа, состоящего из одной-единственной вершины, и что любая операция, приводящая к усложнению графа, не нарушает формулу для графов. Следовательно, формула верна для бесконечного множества всех возможных графов.

Впервые столкнувшись с Великой теоремой Ферма, Эйлер, должно быть, понадеялся на то, что ему удастся найти доказательство, если он будет придерживаться аналогичной стратегии. Великая теорема Ферма и формула Эйлера для графов уходят своими корнями в весьма различные области математики, но одна особенность у них была общей: они обе нечто утверждали относительно бесконечно многих объектов. Формула Эйлера утверждает, что для бесконечно многих графов, которые только существуют на свете, число вершин плюс число областей минус число линий всегда равно единице. Великая теорема Ферма утверждает, что бесконечно много уравнений не допускают решения в целых числах. Напомним, что теорема Ферма утверждает следующее: уравнение

$$x^n + y^n = z^n, \text{ где } n \text{ — любое целое число большее 2,}$$

не допускает решения в целых числах.

Это уравнение в действительности представляет собой бесконечную систему уравнений

$x^3 + y^3 = z^3$,
$x^4 + y^4 = z^4$,
$x^5 + y^5 = z^5$,
$x6 + y^6 = z^6$,
$x^7 + y^7 = z^7$,
. . . . . .

Эйлер попытался выяснить, нельзя ли доказать, что одно из уравнений не допускает решений в целых числах, а затем экстраполировать полученный результат на все остальные уравнения (точно так же, как он доказал свою формулу для всех графов).

Первый шаг к осуществлению задуманного Эйлер совершил, когда обнаружил ключ к доказательству в кратких записях на полях «Арифметики» Диофанта. Хотя Ферма не оставил развернутого доказательства Великой теоремы, он в другом месте того же экземпляра «Арифметики» написал в зашифрованном виде доказательство для случая n =4, включив его в решение совершенно другой задачи. Это были самые подробные вычисления, которые Ферма когда-либо доверил бумаге, но всё же детали всё ещё были обрывочны и расплывчаты, а в заключение доказательства Ферма ссылается на то, что недостаток времени и места не позволяют ему дать более полное объяснение. Несмотря на отсутствие многих

важных деталей в беглых заметках Ферма, в них отчетливо просматривался один из способов доказательства от противного, известный под названием метода бесконечного спуска.

Чтобы доказать, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не допускает решения в целых числах, Ферма начал с предположения о существовании гипотетического решения в целых числах

$$x = X_1, y = Y_1, z = Z_1.$$

При изучении свойств чисел (X_1, Y_1, Z_1) Ферма показал, что если бы такое гипотетическое решение действительно существовало, то существовало бы меньшее решение (X_2, Y_2, Z_2). Рассматривая это новое решение, Ферма смог показать, что если бы оно существовало, то существовало бы еще меньшее решение (X_3, Y_3, Z_3) и т. д.

Ферма обнаружил нисходящую лестницу решений, которая теоретически могла бы продолжаться неограниченно, порождая все меньшие и меньшие решения. Но x, y и z должны быть целыми положительными (так называемыми натуральными) числами, поэтому нескончаемая нисходящая лестница невозможна, потому что должно быть наименьшее целочисленное решение. Полученное противоречие доказывает, что начальное предположение о существовании решения (X_1, Y_1, Z_1) было ложным. Итак, используя метод бесконечного спуска, Ферма доказал, что при $n = 4$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может иметь целочисленных решений.

Эйлер попытался воспользоваться методом бесконечного спуска в качестве исходного пункта при построении общего доказательства для всех других степеней в уравнении Ферма. Он хотел получить доказательство для всех n вплоть до бесконечности, но прежде всего он хотел «опуститься на одну ступень» и получить доказательство при $n = 3$. В письме к прусскому математику Христиану Гольдбаху в августе 1753 года Эйлер сообщил, что ему удалось приспособить метод бесконечного спуска и успешно доказать Великую теорему Ферма для случая $n = 3$. Так через сто лет после смерти Ферма впервые удалось сделать первый шаг на пути к решению его проблемы.

Чтобы распространить предложенное Ферма доказательство со случая $n = 4$ на случай $n = 3$, Эйлеру пришлось ввести в игру довольно причудливое понятие так называемого мнимого числа — величины, открытой европейскими математиками в XVI веке. Говорить о новых числах, что они были «открыты» довольно странно, но ощущение необычности возникает главным образом потому, что мы настолько привыкаем к постоянно и широко используемым числам, что забываем о временах, когда некоторые из этих чисел не были известны. И отрицательные, и иррациональные — все эти числа в свое время приходилось открывать, и мотивация в каждом случае сводилась к необходимости решить задачу, неразрешимую в уже известных числах.

История теории чисел начинается с обыкновенных чисел, используемых для счета — 1,2,3…, — известных под названием натуральных чисел. Эти числа идеально подходят для сложения простых целых величин, таких, как овцы или золотые монеты, чтобы узнать, сколько всего таких величин — их общее количество также есть целое число. Наряду со сложением еще одна простая операция, умножение, производимая над целыми числами, также порождает другие целые числа. Но операция деления приводит к довольно неприятной проблеме. При делении числа 8 на 2 мы получаем 4, но при делении числа 2 на 8 ответ получается равным 1/4. Результатом деления в последнем случае является не целое число, а дробь.

Деление — простая операция, выполняемая над натуральными числами — вынуждает нас выйти за пределы натуральных чисел. Для математика, по крайней мере, теоретически, немыслима ситуация, в которой нет ответа на вопрос, чему равен результат простой операции, производимой над целыми числами. Необходимость существования ответа называется полнотой. Не будь дробей, некоторые вопросы относительно целых чисел остались бы без ответа. Математики выражают это обстоятельство, говоря, что дроби необходимы для полноты.

Именно необходимость полноты вынудила индийских математиков открыть отрицательные числа. Индийские математики заметили, что если 3 вычесть из 5, то

получится 2, а 5 вычесть из 3 не так просто. Ответ не мог быть получен в натуральных числах и понять его можно, только если ввести понятие отрицательного числа. Некоторые математики не приняли столь абстрактного обобщения натурального числа и отзывались об отрицательных числах как «нелепых» и «фиктивных». Пересчитывая золотые монеты, можно подержать в руке одну монету или даже полмонеты, но взять в руку «минус одну» монету решительно невозможно.

Древние греки были обуяны стремлением к полноте, и эта страсть привела их к открытию иррациональных чисел. В главе 2 мы уже обсуждали квадратный корень из 2. Греки знали, что это число приближенно равно 7/5, но когда они попытались найти точную дробь, равную √2, то обнаружили, что такой дроби не существует. Перед ними было число, не представимое в виде дроби, но этот новый тип числа был необходим, чтобы ответить на вопрос: «Чему равен квадратный корень из двух?» Требование полноты означало, что к империи чисел необходимо присоединить еще одну колонию.

К наступлению эпохи Возрождения математики стали думать, что открыли все мыслимые «сорта» чисел на свете. Все числа можно было считать расположенными на числовой оси в обе стороны прямой с нулем в центре, как на рис. 11. Целые числа располагались на числовой оси через равные промежутки, положительные простирались до плюс бесконечности справа от нуля, отрицательные — до минус бесконечности слева от нуля. Дроби располагались в промежутках между целыми числами, а иррациональные числа заполняли пробелы между дробями.

Рис. 11. Все числа можно расположить на числовой оси, простирающейся до бесконечности в обе стороны

Числовая ось наводила на мысль о том, что полнота достигнута. Все числа находились на своих местах, готовые ответить на все математические вопросы, — во всяком случае на числовой оси не оставалось свободных мест ни для каких новых чисел. Но в XVII веке снова начались неприятности. Итальянский математик Рафаэлло Бомбелли, занимаясь изучением квадратных корней из различных чисел, столкнулся с вопросом, не имевшим готового ответа.

Все началось с вопроса: «Чему равен квадратный корень из единицы, т. е. число √1?» Очевидный ответ гласит: единице, так как 1·1=1. Менее очевиден другой ответ: квадратный корень из единицы равен минус единице, т. е. числу –1. Отрицательное число при умножении на отрицательное число, дает положительное, в частности, (–1)·(–1) = 1. Следовательно, квадратный корень из +1 имеет два значения: +1 и –1. Такое обилие ответов само по себе превосходно, но сразу же возникает другой вопрос: «Чему равен квадратный корень из минус единицы, т. е. √–1?» [6] Кажется, что этот вопрос не имеет ответа. Ни +1, ни –1 не годятся в качестве ответа — оба числа в квадрате дают +1. Но никаких других «кандидатов» не видно. Между тем полнота требует, чтобы мы умели отвечать и на вопрос о том, чему равен квадратный корень из –1.

Чтобы ответить на этот вопрос, Бомбелли пришлось ввести новое число i , определив его просто как ответ на вопрос: «Чему равен квадратный корень из минус единицы?». На первый взгляд может показаться, что ввод i — малодушная попытка обойти решение проблемы, но предпринятый Бомбелли ход ничем не отличается от того, как были введены отрицательные числа. Столкнувшись с неразрешимой при ином подходе задачей, индийские математики определили число –1 как ответ на вопрос: «Что получится, если от нуля отнять единицу?». Число –1 кажется более приемлемым только потому, что из повседневного опыта нам знакомо аналогичное понятие «долга», в то время как в реальном мире нет ничего, что

[6] Вспомнилась тут фраза Титчмарша: «Я недавно встретил человека, который сказал мне, что не верит даже в существование минус единицы, так как из этого следует существование квадратного корня из неё».:) — E.G.A.

подкрепляло бы понятие мнимого числа. Немецкий математик XVII века Готтфрид Лейбниц дал следующее изящное описание необычайной природы мнимого числа: «Мнимое число — это бестелесное и преудивительное прибежище Божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием».

Коль скоро мы определили число i как квадратный корень из –1, то должно существовать число $2i$, так как оно равно сумме i плюс i (а также квадратному корню из –4). Аналогично, должно существовать и число i /2, так как оно получается при делении i на 2. Выполняя простые операции, можно получить мнимый эквивалент каждого так называемого действительного числа. Существуют мнимые натуральные числа, мнимые отрицательные числа, мнимые дроби и мнимые иррациональные числа. Проблема, которая теперь возникает, заключается в том, что у всех этих мнимых чисел нет своего естественного места на действительной числовой оси. Математики разрешили возникший кризис, введя еще одну — мнимую — ось, перпендикулярную действительной оси и пересекающую ее в нуле, как показано на рис. 12. Числа перестали занимать одномерную прямую, а расположились на двумерной плоскости. Чисто мнимые или чисто действительные числа заполняют соответствующие оси — действительную и мнимую, а комбинации действительного и мнимого чисел (например, $1+2i$) называются комплексными числами и обитают на так называемой числовой плоскости.

Рис. 12. Введение оси для мнимых чисел превращает числовую ось в числовую плоскость. Каждой комбинации действительного и мнимого чисел соответствует определенная точка на числовой плоскости

Особенно замечательно, что в комплексных числах решается любое алгебраическое уравнение. Например, чтобы вычислить √3+4i , математикам не нужно изобретать числа нового типа: оказывается, что ответ равен $2+i$, т. е. другому комплексному числу. Иначе говоря, создается впечатление, что мнимые числа — последний элемент, необходимый для завершения математики.

Хотя квадратные корни из отрицательных чисел получили название мнимых чисел, математики считают число i ничуть не более абстрактным, чем отрицательное или любое натуральное число. Кроме того, физики обнаружили, что мнимые числа дают лучший язык для описания некоторых явлений, протекающих в реальном мире. С помощью нехитрых манипуляций мнимые числа оказываются идеальным средством анализа естественного колебательного движения объектов, например, маятника. Такое колебательное движение, называемое на техническом языке синусоидальным колебанием, широко распространено в природе, и поэтому мнимые числа стали неотъемлемой составной частью многих физических расчетов. В наше время инженеры-электрики приспособили i к анализу переменных токов, а физики-теоретики вычисляют различные квантовомеханические эффекты с помощью осциллирующих волновых функций, суммируя степени мнимых чисел.

В чистой математике мнимые числа используют для решения задач, ранее казавшихся неразрешимыми. Мнимые числа буквально добавили новое измерение к математике, и Эйлер надеялся, что ему удастся использовать эту дополнительную степень свободы в поисках доказательства Великой теоремы Ферма.

И до Эйлера некоторые математики уже пытались приспособить метод бесконечного спуска Ферма для решения уравнения Ферма в целых числах при n , отличных от 4, но всякий раз попытка распространить метод приводила к каким-нибудь проблемам в логике. И только Эйлер показал, что, используя число i , можно заткнуть все дыры в доказательстве и заставить метод бесконечного спуска работать при n =3.

Это было грандиозное достижение, но повторить успех при других значениях n Эйлеру не удалось. К сожалению, все попытки применить те же рассуждения к другим значениям вплоть до бесконечности закончились провалом. И математик, решивший больше

задач, чем кто-либо другой за всю историю, был вынужден признать поражение — Великая теорема Ферма оставалась неприступной. Единственным утешением для Эйлера было то, что он осуществил первый серьезный прорыв в «круговой обороне» труднейшей математической проблемы в мире.

Не обескураженный постигшей его неудачей, Эйлер продолжал создавать блестящие математические методы до конца своих дней, несмотря на то, что последние годы его жизни были омрачены полной слепотой. Эйлер начал слепнуть в 1735 году, когда Академия в Париже предложила премию за решение одной астрономической проблемы. Эта проблема была столь трудна, что математическое сообщество обратилось к Академии с просьбой дать на решение несколько месяцев, но Эйлеру отсрочка не была нужна. Задача настолько захватила его, что он, работая дни и ночи напролет, решил ее за трое суток и заслуженно получил премию. Но напряженнейшая работа в плохих условиях стоила Эйлеру, которому тогда едва исполнилось двадцать лет, потери одного глаза. Этот физический недостаток отчетливо виден на многих портретах Эйлера, в том числе и на том, который помещен в начале этой главы.

По совету Жана Лерона д'Аламбера Эйлера при дворе Фридриха Великого сменил Жозеф Луи Лагранж, по поводу чего прусский король позже заметил: «Вашим заботам и рекомендациям я обязан тому, что заменил математика, слепого на один глаз, математиком, зрячим на оба глаза, что особенно придется по вкусу членам моей Академии по разряду анатомии». По возвращении Эйлера в Россию Екатерина Великая приветствовала своего «математического циклопа».

Потеря одного глаза имела небольшой «плюс»: как заметил Эйлер, «у меня будет меньше возможностей отвлекаться». Сорок лет спустя, когда Эйлеру было уже шестьдесят, его состояние значительно ухудшилось: катаракта на здоровом глазе означала, что он обречен на полную слепоту. Эйлер решил не поддаваться болезни и начал тренироваться — зажмурив глаз, который видел все хуже и хуже, стал учиться писать вслепую, чтобы овладеть этим искусством прежде, чем свет навсегда померкнет для него. Через несколько недель Эйлер ослеп. Тренировка оказалась весьма кстати, но через несколько месяцев почерк Эйлера стал неразборчивым, и его сын Альберт взял на себя роль личного секретаря отца.

На протяжении следующих семнадцати лет Эйлер продолжал активно заниматься математикой. Более того, его производительность возросла, как никогда прежде. Огромный интеллект Эйлера позволял ему манипулировать понятиями, не фиксируя их на бумаге, а феноменальная память служила полноценной заменой библиотеки. Коллеги даже высказывали предположение, что наступление слепоты расширило горизонты его воображения. Следует заметить, что вычисления положений Луны были выполнены Эйлером уже после наступления слепоты. Для европейских монархов составленные Эйлером таблицы были самым ценным математическим достижением, и решением проблемы, над которой трудились величайшие математики Европы, включая Ньютона.

В 1776 году Эйлеру была сделана операция по удалению катаракты, и на несколько дней зрение, казалось, восстановилось. Но в больной глаз была занесена инфекция, и Эйлер снова погрузился во тьму. Не теряя бодрости духа, он продолжал работать до 18 сентября 1783 года, когда произошел роковой апоплексический удар. По словам математика и философа маркиза де Кондорсэ, «Эйлер перестал жить и вычислять».

Медленным шагом

И через сто лет после кончины Эйлера существовали доказательства только в двух частных случаях Великой теоремы Ферма. Сам Ферма дал математикам фору, оставив им доказательство того, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4$$

не имеет решений в целых числах. Эйлер используя предложенный Ферма метод бесконечного спуска, доказал, что уравнение

$x^3 + y^3 = z^3$

также не имеет решений в целых числах. После Эйлера все еще оставалось необходимо доказать, что бесконечный набор уравнений

$x^5 + y^5 = z^5$,

$x^6 + y^6 = z^6$,

$x^7 + y^7 = z^7$,

$x^8 + y^8 = z^8$,

$x^9 + y^9 = z^9$,

. . . . . .

не имеет решений в целых числах. И хотя математики продвигались поразительно медленно, ситуация складывалась далеко не так плохо, как могло бы показаться на первый взгляд. Оказалось, что доказательство для случая n =4 остается в силе при n =8, 12, 16, 20…. Дело в том, что любое число, представимое в виде 8-й (а также 12-й, 16-й, 20-й…) степени некоторого числа, представимо и в виде 4-й степени какого-то другого целого числа. Например, число 256 равно 28, но оно равно и 44. Следовательно, любое доказательство, которое «работает» для 4-й степени, остается в силе для 8-й и любой другой степени, кратной 4. На основе того же принципа можно утверждать, что эйлеровское доказательство для n =3 автоматически переносится на n =6, 9, 12, 15…. Тем самым Великая теорема Ферма утратила свой неприступный вид и оказалась верной сразу для многих чисел n .

Особенно ценным было доказательство при n =3, так как число 3 — пример так называемого простого числа. Как мы уже объясняли, простое число обладает тем отличительным свойством, что оно не кратно ни одному целому числу, кроме 1 и самого себя. Помимо уже названного числа 3 простыми также являются числа 5,7,11,13… Все остальные числа кратны простым и называются составными числами. Те, кто занимается теорией чисел, считают простые числа наиболее важными потому, что те представляют собой как бы атомы чисел. Простые числа — «кирпичики», из которых построены все остальные числа, поскольку те можно получить как произведения различных комбинаций простых чисел. Казалось бы, это обстоятельство открывает путь к решению проблемы Ферма. Чтобы доказать Великую теорему Ферма при всех значениях n , достаточно доказать ее для простых значений n . Во всех остальных случаях числа n кратны простым числам, и доказательство следует из уже рассмотренных случаев.

Интуитивно это необычайно упрощает проблему, так как дает возможность исключить из рассмотрения все значения n , которые не являются простыми числами. Резко сокращается число уравнений. Например, при значениях n до 20 доказательство следует провести только для шести уравнений:

$x^5 + y^5 = z^5$,

$x^7 + y^7 = z^7$,

$x^{11} + y^{11} = z^{11}$,

$x^{13} + y^{13} = z^{13}$,

$x^{17} + y^{17} = z^{17}$,

$x^{19} + y^{19} = z^{19}$.

Если бы кому-нибудь удалось доказать Великую теорему Ферма для одних лишь простых значений n , то она оказалась бы доказанной для всех значений n . Целых чисел бесконечно много, простые же числа составляют лишь их незначительную долю. Возможно, теорема Ферма станет намного проще, если доказывать ее только для простых чисел?

Интуиция подсказывает, что если вы начнете с какой-то бесконечной величины и изымите из нее бóльшую часть, то у вас останется нечто конечное. К сожалению, интуиция не может служить арбитром истины в математике. Роль арбитра исполняет логика. Оказывается, можно доказать, что перечень простых чисел бесконечен. Следовательно, несмотря на то, что мы можем исключить из рассмотрения подавляющее большинство уравнений при составных значениях n , количество уравнений Ферма с простыми значениями n по-прежнему остается бесконечным.

Доказательство того, что простых чисел бесконечно много, восходит к Евклиду и принадлежит к числу классических рассуждений в математике. Евклид начинает с предположения о том, что перечень известных простых чисел конечен, и доказывает, что в этот перечень придется вносить бесконечно много дополнений. В самом деле, предположим, что в конечный исходный перечень Евклида внесено N простых чисел, которые мы обозначим P_1, P_2, P_3…, P_N. Из них Евклид образует новое число Q_A, такое, что

$$\boldsymbol{Q_A = (P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_N) + 1}.$$

Какое оно, новое число Q_A, — простое или составное? Если оно простое, то нам удалось построить новое простое число, большее, чем любое простое число, указанное в исходном перечне. Это означало бы, что исходный перечень не полон. С другой стороны, если число Q_A составное, то оно должно без остатка делиться на какое-то из простых чисел. Это простое число-делитель не может быть одним из чисел, включенных в исходный перечень, так как при делении на любое из уже перечисленных простых чисел Q_A дает остаток, равный 1. Следовательно, делителем числа Q_A должно быть какое-то новое простое число, которое мы обозначим P_{N+1}.

Итак, мы пришли к тому, что либо Q_A само является простым числом, либо делится на какое-то новое простое число P_{N+1}. И в том, и в другом случае исходный список простых чисел необходимо дополнить. Включив наше новое простое число (Q_A или P_{N+1}) в перечень, мы можем повторить рассуждение и образовать новое число Q_B. Это новое число либо будет еще одним новым простым числом, либо будет делиться на простое число P_{N+2}, еще не включенное в наш перечень известных простых чисел. Итогом этого рассуждения служит заключение, согласно которому сколь бы длинным ни был наш перечень простых чисел, его всегда можно дополнить новым простым числом. Следовательно, наш перечень никогда не кончится — он бесконечен.

Но как может быть нечто, явно меньшее бесконечной величины, также быть бесконечным? Немецкий математик Давид Гильберт сказал однажды: «Бесконечность! Ни один вопрос не оказывал столь глубокого воздействия на человеческий дух, ни одна идея не стимулировала столь плодотворно интеллект человека, и тем не менее ни одно понятие не нуждается в прояснении так сильно, как понятие бесконечности». Чтобы разрешить парадокс бесконечности, необходимо определить, что следует понимать под бесконечностью. Георг Кантор, работавший над проблемой бесконечности наряду с Гильбертом, определил бесконечность как длину нескончаемого перечня натуральных чисел (1,2,3,4…). По Кантору, все, что по величине сравнимо с длиной перечня натуральных чисел, также бесконечно.

Следуя этому определению, нам придется признать, что множество четных натуральных чисел, которое интуитивно кажется меньше, чем множество всех натуральных чисел, также бесконечно. Нетрудно доказать, что всех натуральных чисел столько же, сколько четных натуральных чисел, поскольку каждому натуральному числу можно подобрать пару — соответствующее четное число:

Коль скоро каждому элементу перечня натуральных чисел можно поставить в соответствие элемент перечня четных чисел, то оба перечня должны быть одинаковой длины. Такой метод сравнения приводит к некоторым удивительным заключениям, в том числе к заключению о существовании бесконечно многих простых чисел. Кантор был первым, кто занялся формальным анализом понятия бесконечности, и математическое сообщество подвергло его теорию множеств резкой критике за радикальное определение бесконечности, предложенное им. К концу творческого периода Кантора нападки на него стали принимать все более личный характер и привели к тяжелой душевной болезни и глубокой депрессии Кантора. Его идеи получили признание уже после его кончины как единственно последовательное и эффективное определение бесконечности. Воздавая должное заслугам Кантора, Гильберт сказал: «Никто не может изгнать нас из рая, который Кантор создал для нас».

Гильберту принадлежит пример бесконечности, известный под названием «отель Гильберта» и наглядно иллюстрирующий необычные свойства бесконечности. Этот гипотетический отель обладает отличительным признаком: число номеров в этом отеле равно бесконечности. Однажды в отель прибывает новый гость и к своему разочарованию узнает, что, несмотря на бесконечно большое количество номеров, свободных мест нет. Гильберт, выступающий в роли портье, поразмыслив немного, уверяет нового гостя, что найдет для него свободный номер. Он просит каждого постояльца переселиться в соседний номер: постояльца из номера 1 переселиться в номер 2, постояльца из номера 2 — переселиться в номер 3, и т. д. Каждый из постояльцев, живших в отеле, получает новый номер, а новый гость поселяется в освободившийся номер 1. Это показывает, что бесконечность плюс один равна бесконечности. [7]

На следующий вечер портье Гильберт столкнулся с гораздо более трудной проблемой. Как и накануне, отель был переполнен, когда прибыл бесконечно длинный лимузин, из которого высадилось бесконечно много новых гостей. Но Гильберта это нисколько не смутило, и он только радостно потирал руки при мысли о бесконечно многих счетах, которые оплатят вновь прибывшие. Всех, кто уже обосновался в отеле, Гильберт попросил переселиться, соблюдая следующее правило: обитателя первого номера — во второй номер, обитателя второго номера—в четвертый номер, и т. д., то есть каждого постояльца Гильберт попросил перейти в новый номер с вдвое большим «адресом». Все, кто жил в отеле до прибытия новых гостей, остался в отеле, но при этом освободилось бесконечно много номеров (все те, «адреса» которых нечетны), в которых находчивый портье расселил новых гостей. Этот пример показывает, что удвоенная бесконечность также равна бесконечности.

Возможно, отель Гильберта наведет кого-нибудь на мысль, что все бесконечности одинаково велики, равны друг другу, и что любые различные бесконечности можно втиснуть в номера одного и того же бесконечного отеля, как это делал находчивый портье. Но в действительности одни бесконечности больше других. Например, любая попытка найти в пару каждому рациональному числу иррациональное число так, чтобы ни одно иррациональное число не осталось без своей рациональной пары, непременно заканчивается неудачей. И действительно, можно доказать, что бесконечное множество иррациональных чисел больше бесконечного множества рациональных чисел. Математикам пришлось создать целую систему обозначений и названий с бесконечной шкалой бесконечностей, и манипулирование с этими понятиями — одна из наиболее острых проблем нашего времени.

Хотя бесконечность количества простых чисел навсегда разрушила надежды на скорое доказательство Великой теоремы Ферма, такой большой запас простых чисел пригодился, например, в таких областях как шпионаж или исследование жизни насекомых. Прежде чем мы вернемся к повествованию о поиске доказательства Великой теоремы Ферма, уместно немного отвлечься и познакомиться с тем, как правильно и неправильно используются простые числа.

*** * ***

---

[7] Приведу иллюстрацию с вселением нового клиента в отель Гильберта. Она позаимствована из книги «Proofs from THE BOOK», выпущенной издательством Springer в 1998 году и переизданной в 2001 году. Авторы: Martin Aigner и Günter M. Ziegler. Мелкая цитата из предисловия авторов к этой книге: "Paul Erdös liked to talk about The Book, in which God maintains the perfect proofs for mathematical theorems, following the dictum of G. H. Hardy that there is no permanent place for ugly mathematics. Erdös also said that you need not believe in God but, as mathematician, you should believe in The Book. We have no definition or characterization of what constitutes a proof from The Book: all we offer here is the examples that we have selected, hoping that our readers will share our enthusiasm about brilliant ideas, clever insights and wonderful observations. We also hope that our readers will enjoy this despite the imperfections of our exposition. The selection is to a great extent influenced by Paul Erdös himself." Вот главу "Множества, функции и гипотеза континуума" эта иллюстрация и открывает. — E.G.A.

Теория простых чисел — одна из немногих областей чистой математики, которые нашли непосредственное приложение в реальном мире, а именно в криптографии. Криптография занимается кодированием секретных посланий с таким расчетом, чтобы декодировать их мог только получатель, а перехватчик расшифровать бы их не мог. Процесс кодирования требует использования ключа к шифру, и по традиции для дешифровки необходимо снабдить получателя этим ключом. При такой процедуре ключ — самое слабое звено в цепи обеспечения безопасности. Во-первых, получатель и отправитель должны условиться о деталях ключа, и обмен информацией на этом этапе сопряжен с определенным риском. Если противнику удастся перехватить ключ при обмене информацией, то он сможет дешифровывать все последующие послания. Во-вторых, для поддержания безопасности ключи необходимо регулярно менять, и при каждой замене ключа существует риск перехвата нового ключа противником.

Проблема ключа вращается вокруг того факта, что применение ключа в одну сторону приводит к шифровке послания, а применение того же ключа в обратную сторону дешифрует послание — дешифровка производится столь же легко, как и шифровка. Но из опыта нам известно, что ныне существуют многие ситуации, когда дешифровка гораздо сложнее, чем шифровка: приготовить яичницу-болтунью несравненно легче, чем вернуть яичницу-болтунью в исходное состояние, разделив белки и желтки.

В 70-е годы XX века Уитфилд Диффи и Мартин Хеллман занялись поиском математического процесса, который было бы легко выполнить в одну сторону, но невероятно трудно — в противоположную сторону. Такой процесс дал бы идеальный ключ. Например, у меня мог бы быть мой собственный ключ из двух частей, и его шифровальную часть я мог бы опубликовать в общедоступном месте. После этого любой желающий мог бы посылать мне зашифрованные послания, но дешифровальная часть ключа была бы известна только мне. И хотя шифровальная часть ключа была бы доступна всем, к дешифровальной части она не имела бы никакого отношения.

В 1977 году Рональд Ривест, Ади Шамир и Леонард Адлеман — группа математиков и специалистов по компьютерам из Массачусеттского технологического института — выяснили, что простые числа являются идеальным базисом для процесса легкой шифровки и трудной дешифровки. Чтобы изготовить мой собственный персональный ключ, я мог бы взять два огромных простых числа, каждое из которых содержит до 80 знаков, и, умножив одно число на другое, получить еще большее составное число. Все, что требуется для кодирования посланий, — это знать большое составное число, тогда как для дешифровки послания необходимо знать два исходных простых числа, которые мы перемножили, т. е. простые множители составного числа. Я могу позволить себе опубликовать большое составное число — шифровальную половину ключа, и сохранить в тайне два простых множителя — дешифровальную половину ключа. Очень важно, что хотя любому известно большое составное число, разложить его на два простых множителя чрезвычайно трудно.

Рассмотрим более простой пример. Предположим, что я выбрал и сообщил всем желающим составное число 589, позволяющее каждому посылать мне шифрованные послания. Два простых множителя числа 589 я сохранил бы в тайне, поэтому расшифровать послания никто, кроме меня, не может. Если бы кому-нибудь удалось найти два простых множителя числа 589, то такой человек также смог бы дешифровывать адресованные мне послания. Но сколь ни мало число 589, найти его простые множители не так-то просто. В данном случае на настольном компьютере в несколько минут можно было бы обнаружить, что простые множители числа 589 равны 31 и 19 ($31 \cdot 19 = 589$), поэтому мой ключ не мог бы гарантировать безопасность переписки особенно долго.

Но если бы составное число, которое я опубликовал, содержало более сотни знаков, это делало бы поиск простых множителей практически неразрешимой задачей. Даже если для разложения огромного составного числа (шифровального ключа) на два простых множителя (дешифровального ключа) использовать самые мощные компьютеры, которые только существуют в мире, то и тогда, чтобы найти эти множители, понадобилось бы несколько лет.

Следовательно, чтобы сорвать коварные планы иностранных шпионов, мне необходимо всего лишь ежегодно менять ключ. Раз в год я довожу до всеобщего сведения свое новое гигантское составное число, и тогда всякий, кто пожелает попытать счастья и расшифровать мои послания, будет вынужден приступать заново к разложению опубликованного числа на два простых множителя.

* * *

Простые числа встречаются и в мире живой природы. У периодических цикад, известных как Magicicada septendecim, самый длинный жизненный цикл из всех насекомых. Их жизнь начинается под землей, где личинки терпеливо сосут соки из корней деревьев. И лишь через 17 лет ожидания взрослые цикады появляются из-под земли, собираются в огромные рои и на какое-то время заполоняют все вокруг. За несколько недель они спариваются, откладывают яйца, а затем умирают.

Вопрос, который не давал биологам покоя, — почему жизненный цикл у цикад такой длинный? Имеет ли какое-нибудь значение для жизненного цикла то, что продолжительность его выражается простым числом лет? Другой вид — Magicicada tredecim — роится через каждые 13 лет. Это наводит на мысль, что продолжительность жизненного цикла, выражающаяся простым числом лет, дает виду определенные эволюционные преимущества.

Согласно одной теории, у цикады имеется паразит, также обладающий длинным жизненным циклом. Цикада, естественно, стремится избавиться от паразита. Если паразит обладает жизненным циклом продолжительностью, скажем 2 года, то цикада стремится избежать жизненного цикла, продолжительность которого в годах делится на 2, так как в противном случае цикада, появляясь из-под земли, и паразит регулярно встречались бы. Аналогично, если бы паразит обладал жизненным циклом продолжительностью 3 года, то цикада стремилась бы избегать жизненных циклов, продолжительность которых в годах выражалась числом, кратным 3. Следовательно, чтобы избежать совпадений с паразитом, лучшей стратегией для цикады было бы иметь жизненный цикл, длящийся простое число лет. Так как ни одно целое число (кроме 1 и 17) не делит число 17, Magicicada septendecim очень редко встречается со своим паразитом. Если продолжительность жизненного цикла паразита составляет 2 года, то цикада встречается с ним только раз в 34 года, а если продолжительность жизненного цикла паразита больше, например, составляет 16 лет, то его встреча с цикадой происходит лишь раз в 272 (= 16·17) года.

«Реванш» для паразита возможен только в двух случаях: при его годичном жизненном цикле и при жизненном цикле продолжительностью 17 лет. Маловероятно, однако, что паразит выживет на протяжении 17 своих поколений подряд, так как первым 16 поколениям будет не на ком паразитировать. С другой стороны, чтобы достичь 17-летней продолжительности жизненного цикла, поколениям паразита необходимо пройти в своей эволюции 16-летний жизненный цикл. Это означало бы, что на каком-то этапе эволюции паразит и цикада не встречались бы на протяжении 272 лет! И в том, и в другом случае большой жизненный цикл продолжительностью в простое число лет способствуют выживанию цикады.

Возможно, именно этим и объясняется, что пресловутый паразит так никогда и не был найден! В гонке на выживание с цикадой паразит, по-видимому, постоянно увеличивал продолжительность своего жизненного цикла до тех пор, пока не наткнулся на 16-летний барьер. После этого паразит на протяжении 272 лет не мог встретиться со своей жертвой и за это время вымер. В результате появилась цикада с жизненным циклом длиной 17 лет. Необходимость в более продолжительном жизненном цикле для цикады отпала, поскольку паразит более не существовал.

Месье Леблан

К началу XIX века за Великой теоремой Ферма установилась устойчивая репутация самой трудной проблемы в теории чисел. После прорыва, осуществленного Эйлером, не было ни малейшего продвижения, пока сенсационное заявление одной юной француженки не вдохнуло новые надежды. Поиски доказательства Великой теоремы Ферма возобновились с новой силой. Софи Жермен выпало жить в эпоху шовинизма и предрассудков, и для того, чтобы иметь возможность заниматься математикой, ей пришлось принять псевдоним, работать в ужасных условиях и творить в интеллектуальной изоляции.

На протяжении веков занятия математикой считались неженским делом, но, несмотря на дискриминацию, нашлось несколько женщин-математиков, выступивших против сложившихся обычаев и порядков и запечатлевших свои имена в анналах математики. Первой женщиной, оставившей след в истории математики, была Теано (VI век до н. э.), учившаяся у Пифагора, ставшая одним из его самых близких последователей и вышедшая за него замуж. Пифагора иногда называют «философом-феминистом» за то, что он всячески поощрял женщин-ученых. Теано была лишь одной из двадцати восьми сестер в пифагорейском братстве.

В более поздние времена сторонники и последователи Сократа и Платона продолжали приглашать женщин в свои школы, но только в IV веке н. э. женщина-математик основала свою собственную влиятельную школу. Ипатия, дочь профессора математики Александрийской академии, прославилась на весь известный тогда мир своими диспутами и умением решать различные задачи. Математики, на протяжении долгих месяцев ломавшие головы над решением какой-нибудь задачи, обращались к Ипатии с просьбой о помощи, и та редко разочаровывала своих поклонников. Математика и процесс логического доказательства целиком захватили ее, и на вопрос, почему она не выходит замуж, Ипатия отвечала, что обручена с Истиной. Именно безграничная вера Ипатии в человеческий разум стала причиной ее смерти, когда Кирилл, патриарх Александрийский, начал преследовать философов, естествоиспытателей и математиков, которых он называл еретиками. Историк Эдвард Гиббон оставил яркое описание событий, происшедших после того, как Кирилл организовал заговор против Ипатии и натравил на нее толпу.

«В тот роковой день, в священный сезон Лента, Ипатию вытащили из колесницы, на которой она ехала, раздели донага, поволокли к церкви и бесчеловечно разрубили ее на части руками Петра Чтеца и толпы диких и безжалостных фанатиков; ее плоть содрали с костей острыми устричными раковинами, а ее трепещущие конечности были сожжены на костре».

После смерти Ипатии в математике наступил период застоя. Вторая женщина, заставившая говорить о себе как о математике, появилась только после Возрождения. Мария Аньези родилась в Милане в 1718 году. Как и Ипатия, она была дочерью математика. Аньези была признана одним из лучших математиков Европы. Особую известность ей принесли труды, посвященные касательным к кривым. В Италии кривые назывались «versiera» (от латинского «поворачивать»), но это же слово считалось сокращением слова «avversiera» — «жена дьявола». Кривые, исследованные Аньези (versiera Agnesi) были неправильно переведены на английский язык как «ведьма Аньези», и со временем Марию Аньези стали величать так же.

Хотя математики по всей Европе признавали математический талант Аньези, многие академические учреждения, в частности Французская Академия, отказались предоставить ей пост, позволяющий заниматься исследованиями. Политика недопущения женщин на академические посты продолжалась и в XX веке, когда Эмми Нётер, о которой Эйнштейн отзывался как о «наиболее значительном творческом математическом гении из числа появившихся с тех пор, как началось высшее образование для женщин», отказали в предоставлении права чтения лекций в Гёттингенском университете. Большинство профессоров рассуждало так: «Как можно допустить, чтобы женщина стала приват-доцентом? Ведь если она станет приват-доцентом, то со временем может стать профессором и членом университетского сената… Что подумают наши солдаты, когда

вернутся в университет и узнают, что должны будут учиться у ног женщины?» Давид Гильберт, друг и наставник Эмми Нётер, возразил на это так: «Господа! Я не понимаю, почему пол кандидата препятствует принятию ее в качестве приват-доцента. В конце концов университетский сенат — не мужские бани».

Позднее у Эдмунда Ландау, коллеги Нётер, спросили, действительно ли Нётер великая женщина-математик, на что он ответил: «Я могу поклясться, что она великий математик, но в том, что она женщина, я поклясться не могу».

Помимо того, что Эмми Нётер так же, как и женщины-математики прошлых веков, страдала от дискриминации, она имела с ними еще много общего: например, была дочерью математика. Вообще, многие математики происходили из математических семейств, и это породило лишенные всякого основания слухи об особом математическом гене, но среди женщин-математиков процент выходцев из математических семей особенно велик. Объяснение заключается, по-видимому, в том, что даже самые одаренные женщины не решились бы изучать математику или не получили бы поддержку своим намерениям, если бы их семья не была бы причастна науке. Подобно Ипатии, Аньези и большинству других женщин-математиков, Нётер не была замужем. Столь массовое безбрачие среди женщин-математиков объясняется тем, что выбор женщиной профессии математика встречал неодобрительное отношение со стороны общества, и лишь немногие мужчины осмеливались предложить руку и сердце женщинам с такой «сомнительной» репутацией. Исключением из общего правила стала великая женщина-математик из России Софья Васильевна Ковалевская. Она вступила в фиктивный брак с палеонтологом Владимиром Онуфриевичем Ковалевским. Для обоих брак был спасением, позволив им вырваться из-под опеки семей и сосредоточиться на научных исследованиях. Что же касается Ковалевской, то путешествовать в одиночку ей было гораздо удобнее под видом респектабельной замужней дамы.

Из всех европейских стран наиболее непримиримую позицию по отношению к образованным женщинам занимала Франция, провозгласившая, что математика — неподходящее занятие для женщин и лежит за пределами их умственных способностей! И хотя салоны Парижа доминировали в математическом мире XVIII и XIX веков, только одной женщине удалось вырваться из пут французского общественного мнения и утвердить за собой репутацию крупного специалиста по теории чисел. Софи Жермен революционизировала поиски Доказательства Великой теоремы Ферма и внесла вклад, значительно превосходящий все, что сделали ее предшественники-мужчины.

Софи Жермен родилась 1 апреля 1776 года в семье торговца Амбруаза Франсуа Жермен. Помимо увлечения математикой на ее жизнь глубокое влияние оказали бури и невзгоды Великой французской революции. В тот самый год, когда она открыла для себя свою любовь к числам, народ взял штурмом Бастилию, а на то время, когда она занималась изучением математического анализа, пала тень царства террора. Хотя отец Софи был вполне состоятельным человеком, Жермены не принадлежали к аристократии.

Девушек, стоявших на той же ступени социальной лестницы, что и Софи, не особенно поощряли к изучению математики, тем не менее предполагалось, что они должны обладать достаточным знанием этого предмета, чтобы иметь возможность поддержать светский разговор, если он коснется какого-нибудь математического вопроса. Для этого была написана серия учебников, призванных ознакомить их с последними достижениями математики и естествознания. Так, перу Франческо Альгаротти принадлежал учебник «Философия сэра Исаака Ньютона, объясненная для пользы дам». Поскольку Альгаротти был убежден в том, что дам могут интересовать только романы, открытия Ньютона он попытался изложить в виде диалога маркизы, флиртующей с собеседником. Например, собеседник излагает маркизе закон всемирного тяготения, в ответ на что маркиза

высказывает собственную интерпретацию этого фундаментального закона физики: «Я не могу отделаться от мысли, что… то же соотношение, обратная пропорциональность квадрату расстояния… наблюдается и в любви. Например, если влюбленные не видятся восемь дней, то любовь становится в шестьдесят четыре раза слабее, чем в день разлуки».

Неудивительно, что интерес Софи Жермен к науке возник не под влиянием книг такого галантного жанра. Событие, изменившее всю ее жизнь, произошло в тот день, когда она, перебирая книги в отцовской библиотеке, случайно наткнулась на «Историю математики» Жана Этьена Монтуклы. Ее внимание привлекла глава, в которой Монтукла рассказывает о жизни Архимеда. Перечень открытий Архимеда в изложении Монтуклы, несомненно, вызывал интерес, но особенно воображение Софи захватил эпизод, в котором речь шла о смерти Архимеда.

По преданию, Архимед провел всю свою жизнь в Сиракузах, где в сравнительно спокойной обстановке занимался математикой. Но когда ему было далеко за семьдесят, покой был нарушен вторжением римской армии. Согласно легенде, именно во время этого вторжения Архимед, глубоко погруженный в созерцание геометрической фигуры, начертанной на песке, не расслышал обращенный к нему вопрос римского солдата, и, пронзенный копьем, погиб. [8]

Жермен рассудила, что если геометрическая задача может настолько захватить кого-то, что это привело к его смерти, то математика должна быть самым удивительным предметом в мире. Софи немедленно принялась за самостоятельное изучение основ теории чисел и математического анализа, и вскоре засиживалась допоздна, читая труды Эйлера и Ньютона. Внезапный интерес к столь «неженскому» предмету, как математика, встревожил родителей Софи. Друг семьи граф Гульельмо Либри-Каруччи далла Соммайя рассказывал, что отец Софи отобрал у дочери свечи, одежду и унес жаровню, обогревавшую ее комнату, чтобы помешать ей заниматься математикой. Несколькими годами позднее в Британии отец молодой девушки-математика Мэри Сомервилл также отнял у дочери свечи, заявив: «Этому нужно положить конец, если мы не хотим увидеть Мэри в смирительной рубашке».

Но в ответ Софи Жермен завела тайное хранилище для свечей и спасалась от холода, кутаясь в простыни. По сообщению Либри-Каруччи, ночи зимой бывали такими холодными, что чернила замерзали в чернильнице, но Софи продолжала заниматься математикой, невзирая ни на что. Некоторые из знавших ее в юности утверждали, что она была застенчивой и неуклюжей, но решимости ей было не занимать, и в конце концов родители уступили и дали Софи благословение на занятия математикой. Жермен никогда не была замужем, и на протяжении всей ее карьеры исследования Софи финансировал отец. Долгие годы Жермен проводила свои исследования в полном одиночестве, потому что в семье не было математиков, которые могли бы познакомить ее с новейшими идеями, а учителя Софи отказывались признать ее всерьез.

В 1794 году в Париже открылась Политехническая школа (École Polytechnique), основанная как высшее учебное заведение для подготовки математиков и естествоиспытателей для нужд нации. Эта школа могла бы стать идеальным местом для Жермен, где она могла бы развить свое математическое дарование, если бы не одно непреодолимое препятствие: в École Polytechnique принимали только мужчин. Природная застенчивость не позволяла Софи открыто выступить против школьных властей, и она решила учиться там тайно, под видом бывшего студента этого учебного заведения месье Антуана Огюста Леблана. Руководству школы не было известно, что настоящий месье

---

[8] Хм… Я где-то читал, что он поплатился жизнью, когда крикнул: «Осторожно! Не наступи на мои чертежи!», но римский солдат, к которому был обращен этот возглас, не обратил внимания, что перед ним безоружный старик. :(А в упомянутой мною раньше книге «Proofs from THE BOOK» главу "Теория чисел" предваряет рисунок, на котором никакого копья нет. Видать, художник тоже не знал подробностей смерти Архимеда. — E.G.A.

Леблан уже покинул Париж, и оно продолжало печатать для него конспекты лекций и задачи. Жермен стала получать материалы, предназначавшиеся для Леблана, и каждую неделю предоставляла решения задач под свои новым псевдонимом. Все шло по плану до тех пор, пока несколько месяцев спустя смотритель курса Жозеф Луи Лагранж не обратил внимание на блестящие решения, которые стал представлять месье Леблан. Решения месье Леблана не только отличались необычайным остроумием, но и свидетельствовали о глубокой перемене, происшедшей в студенте, ранее известном своими слабыми познаниями в математике. Лагранж, принадлежавший к числу наиболее выдающихся математиков Европы, потребовал встречи с преобразившимся студентом, и Софи Жермен была вынуждена открыть, кто она на самом деле. Лагранж был удивлен и приятно поражен, увидев перед собой девушку, и стал ее наставником и другом. Наконец-то у Софи Жермен появился учитель, который мог поощрить и вдохновить ее, кому она могла открыто продемонстрировать свои знания и с кем могла поделиться замыслами.

Жермен обретала все большую уверенность в своих силах и перешла от решения задач в учебных заданиях к изучению еще неисследованных областей математики. Но самое важное для нашего повествования заключается в том, что Софи заинтересовалась теорией чисел и, естественно, не могла не услышать о Великой теореме Ферма. Несколько лет Жермен проработала над ее доказательством и, наконец, достигла такого этапа, когда ей показалось, что она смогла продвинуться к желанной цели. Возникла насущная необходимость обсудить полученные результаты с коллегой, специалистом по теории чисел, и Жермен решилась обратиться к самому большому специалисту по теории чисел — немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу.

По всеобщему признанию Гаусс — самый блестящий из когда-либо живших на свете математиков. Э.Т. Белл называл Ферма «князем любителей», а Гаусса — «князем математиков». Впервые Жермен по достоинству оценила талант Гаусса, встретив его шедевр «Арифметические исследования» — наиболее важный и необычайно широкий по охвату проблем трактат из написанных со времен «Начал» Евклида. Труды Гаусса оказали влияние на все разделы математики, но, как ни странно, он никогда ничего не опубликовал о Великой теореме Ферма. В одном письме Гаусс высказал даже пренебрежительное отношение к проблеме Ферма. Друг Гаусса, немецкий астроном Генрих Ольберс, написал ему письмо, настоятельно советуя принять участие в конкурсе на соискание премии Парижской Академии за решение проблемы Ферма: «Мне кажется, дорогой Гаусс, что Вам следовало бы озаботиться этим». Двумя неделями позже Гаусс ответил: «Весьма обязан за вести относительно Парижской премии. Но признаюсь, что Великая теорема Ферма как некое отдельное предложение представляет для меня весьма малый интерес, поскольку я мог бы привести множество таких предложений, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть». Гаусс имел право придерживаться своего мнения, однако Ферма ясно заявил, что доказательство существовало, и даже предпринятые впоследствии неудачные попытки найти доказательство породили новые и оригинальные методы, такие, как доказательство методом бесконечного спуска и использование мнимых чисел. Возможно, Гаусс также пытался найти доказательство и потерпел неудачу, а его ответ Ольберсу — всего лишь вариант заявления «зелен виноград». Тем не менее, успех, достигнутый Жермен, о котором Гаусс узнал из ее писем, произвел на него столь сильное впечатление, что Гаусс на время забыл о своем пренебрежительном отношении к Великой теореме Ферма.

Семьюдесятью пятью годами ранее Эйлер опубликовал найденное им доказательство для $n=3$, и с тех пор все математики тщетно пытались доказать Великую теорему Ферма в других частных случаях. Но Жермен избрала новую стратегию и в письмах к Гауссу изложила так называемый общий подход к проблеме Ферма. Иначе говоря, ее непосредственной целью было не доказательство отдельного случая — Жермен вознамерилась сказать нечто о многих частных случаях сразу. В письмах к Гауссу она изложила общий ход вычислений, сосредоточенных на простых числах p частного типа: таких, что числа $2p+1$ — также простые. В составленный Жермен перечень таких простых

чисел входит число 5, поскольку 11 = 2·5 + 1 — также простое, но число 13 в него не входит, так как 27 = 2·13 + 1 не простое.

В частности, Жермен с помощью изящного рассуждения, доказала, что если уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет решения для таких простых n, что $2n+1$ также простое число, то либо x, y, либо z делится n.

В 1825 году метод Софи Жермен был успешно применен Густавом Леженом Дирихле и Адриеном Мари Лежандром. Этих ученых разделяло целое поколение. Лежандр был семидесятилетним старцем, пережившим политические бури Великой французской революции. За отказ поддержать правительственного кандидата в Национальный Институт он был лишен пенсии, и к тому времени, когда он внес свою лепту в доказательство Великой теоремы Ферма, Лежандр испытывал сильнейшую нужду. Дирихле же был молодым и исполненным честолюбивых замыслов специалистом по теории чисел, которому едва исполнилось двадцать лет. И Лежандру, и Дирихле независимо друг от друга удалось доказать Великую теорему Ферма при $n=5$, причем оба основывали свои доказательства на рассуждениях Софи Жермен и именно ей были обязаны своим успехом.

Еще один прорыв осуществил четырнадцатью годами спустя француз Габриель Ламе. Он внес некоторые остроумные усовершенствования в метод Жермен и доказал Великую теорему Ферма при простом значении $n=7$. Жермен показала специалистам по теории чисел, как исключить целую группу случаев с простыми значениями n, и теперь объединенными усилиями ее коллеги продолжали доказывать теорему для одного простого значения n за другим. Работа Жермен над Великой теоремой Ферма стала ее величайшим достижением в математике, хотя и не сразу оцененным по достоинству. Когда Жермен впервые написала Гауссу, ей не было еще и тридцати лет, и хотя ее имя приобрело известность в Париже, она опасалась, что великий математик не воспримет письмо от женщины всерьез. Чтобы защитить себя, Жермен снова укрылась за псевдонимом, подписав письмо именем месье Леблана.

Софи не скрывала своего благоговения перед Гауссом. Вот фраза из ее письма: «К сожалению, глубина моего интеллекта уступает ненасытности моего аппетита, и я сознаю все безрассудство своего поступка, когда беру на себя смелость побеспокоить гениального человека, не имея ни малейшего права на его внимание, кроме восхищения, которое неизбежно охватывает всех его читателей». Гаусс, не подозревая о том, кто в действительности его корреспондент, попытался успокоить «месье Леблана». В ответном письме Гаусса говорилось: «Я восхищен тем, что арифметика нашла в Вас столь способного друга».

Результаты, полученные Жермен, могли бы навсегда остаться ошибочно приписанными месье Леблану, если бы не император Наполеон. В 1806 году Наполеон захватил Пруссию, и французская армия штурмовала одну германскую столицу за другой. Жермен стала опасаться, как бы судьбу Архимеда не разделил ее второй великий герой — Гаусс. Софи написала своему другу — генералу Жозефу Мари Пернети, командовавшему наступавшими войсками. В письме она просила генерала обеспечить Гауссу безопасность. Генерал предпринял соответствующие меры, позаботился о немецком математике и объяснил ему, что тот обязан своей жизнью мадемуазель Жермен. Гаусс выразил свою признательность, но был удивлен, так как никогда не слышал о Софи Жермен.

Игра была проиграна. В следующем же письме Гауссу Жермен неохотно открыла свое подлинное имя. Ничуть не рассердившись за обман, Гаусс с восторгом ответил ей: «Как описать Вам тот восторг и то изумление, которые охватили меня при виде того, как мой высокочтимый корреспондент месье Леблан претерпел метаморфозу, превратившись в замечательную особу, подающую столь блестящий пример, что мне трудно в это поверить. Вкус к абстрактным наукам вообще, и прежде всего ко всем таинствам чисел, встречается крайне редко, и это не удивительно: прельстительные чары этой тонкой науки открываются только тем, кто имеет смелость глубоко проникнуть в нее. Но когда представительница того пола, который в соответствии с нашими обычаями и предрассудками, должен встретиться с

бесконечно большими трудностями, чем мужчины, при ознакомлении с тернистыми исследованиями, умудряется успешно преодолеть все эти препятствия и проникнуть в их самые темные части, то, несомненно, она обладает благородным мужеством, совершенно необыкновенными талантами и высшей одаренностью. Ничто не смогло бы убедить меня столь лестным и несомненным образом в том, что привлекательные стороны этой науки, обогатившей мою жизнь таким количеством радостей, не являются плодом фантазии, как та преданность, которой Вы почтили ее».

Переписка с Карлом Гауссом, ставшая для Софи Жермен источником вдохновения в работе, внезапно оборвалась в 1808 году. Гаусс был назначен профессором астрономии в Гёттингенском университете, его интересы переместились от теории чисел к более прикладной математике, и он перестал отвечать на письма Жермен. Лишившись поддержки такого наставника, Жермен потеряла уверенность в своих силах и через год оставила занятия чистой математикой. Хотя ей не удалось продвинуться дальше в доказательстве Великой теоремы Ферма, она занялась весьма плодотворной деятельностью в области физики — научной дисциплины, в которой она снова могла бы занять выдающееся положение, если бы не предрассудки истеблишмента. Наивысшим достижением Софи Жермен в физике стал «Мемуар о колебаниях упругих пластин» — блестящая, полная новых идей работа, заложившая основы современной теории упругости. За эту работу и работы по Великой теореме Ферма она была удостоена медали Института Франции и стала первой женщиной, которая посещала лекции в Академии Наук, не будучи женой члена Академии. К концу жизни Софи Жермен восстановила отношения с Карлом Гауссом, убедившим Гёттингенский университет присудить ей почетную ученую степень. К сожалению, Софи Жермен умерла от рака груди прежде, чем университет смог оказать ей заслуженную почесть.

«Учитывая все сказанное, можно сказать, что Софи Жермен, по-видимому, обладала наиболее глубоким умом среди женщин, которых когда-либо производила Франция. Может показаться странным, но когда пришел чиновник, чтобы выдать свидетельство о смерти этой знаменитой коллеги и сотрудницы самых знаменитых членов Французской Академии Наук, в графе «род занятий» он обозначил ее как «одинокая женщина без профессии», а не «математик». Но это еще не все. При строительстве Эйфелевой башни инженеры уделяли особое внимание упругости используемых материалов, и на этом гигантском сооружении были начертаны имена семидесяти двух ученых, внесших особенно большой вклад в развитие теории упругости. Но тщетно мы стали бы искать в этом списке имя гениальной дочери Франции, чьи исследования во многом способствовали становлению теории упругости металлов — Софи Жермен. Была ли она исключена из этого списка по той же причине, по которой Мария Аньези не была удостоена членства в Французской Академии, — потому, что была женщиной? По-видимому, дело обстояло именно так. Но если это действительно так, то тем больший позор для тех, кто ответствен за такую вопиющую неблагодарность по отношению к человеку, имевшему столь большие заслуги перед наукой, — человеку, обеспечившему себе достойное место в зале славы». (А.Ж. Мозанс, 1913.)

Запечатанные конверты

После прогресса, достигнутого благодаря работам Софи Жермен, Французская Академия Наук установила серию премий, включая золотую медаль и 3000 франков, тому математику, который сумеет наконец разгадать тайну Великой теоремы Ферма. Того, кто сумеет доказать теорему, ждала не только заслуженная слава, но и значительное материальное вознаграждение. Салоны Парижа полнились слухами относительно того, какую стратегию избрал тот или иной претендент и как скоро объявят результаты конкурса. Наконец 1 марта 1847 года, Академия собралась на самое драматическое из своих заседаний.

В протоколах заседания подробно описывается, как Габриель Ламе, семью годами

раньше доказавший Великую теорему Ферма для $n = 7$, взошел на трибуну перед самыми знаменитыми математиками XIX века и заявил, что находится на пороге доказательства Великой теоремы Ферма для общего случая. Ламе признал, что его доказательство еще не полно, но он обрисовал в общих чертах свой метод и не без удовольствия сообщил, что через несколько недель опубликует полное доказательство в журнале, издаваемом Академией.

Аудитория замерла от восторга, но едва Ламе покинул трибуну как слова попросил еще один из лучших парижских математиков Огюстен Луи Коши. Обращаясь к членам Академии, Коши сообщил, что уже давно работает над доказательством Великой теоремы Ферма, исходя примерно из тех же идей, что и Ламе, и также вскоре намеревается опубликовать полное доказательство.

И Коши, и Ламе сознавали, что решающее значение имеет время. Тому, кто сумеет первым представить полное доказательство, достанется самая престижная и ценная награда в математике. Хотя ни Ламе, ни Коши не располагали полным доказательством, оба соперника страстно желали подкрепить свои заявления, и три недели спустя оба представили в Академию запечатанные конверты. В то время так было принято. Это позволяло математикам отстаивать свои приоритет, не раскрывая детали своей работы. Если впоследствии возникал спор относительности оригинальности идей, то в запечатанном конверте хранились убедительные подтверждения, необходимые для установления приоритета.

В апреле, когда Коши и Ламе наконец опубликовали некоторые детали своих доказательств в Трудах Академии, напряжение усилилось. Все математическое сообщество отчаянно жаждало ознакомиться с полным доказательством, причем многие математики втайне надеялись, что состязание выиграет Ламе, а не Коши. Судя по всем отзывам, Коши был самодовольным существом и религиозным фанатиком. К тому же он был весьма непопулярен среди своих коллег. В Академии его терпели только за блестящий ум.

Наконец, 24 мая было сделано заявление, которое положило конец всем домыслам. К Академии обратился не Коши и не Ламе, а Жозеф Лиувилль. Он поверг достопочтенную аудиторию в шок, зачитав письмо от немецкого математика Эрнста Куммера. Куммер был признанным специалистом по теории чисел, но горячий патриотизм, питаемый искренней ненавистью к Наполеону, на протяжении многих лет не позволял ему отдаться своему истинному призванию. Когда Куммер был еще ребенком, французская армия вторглась в его родной город Сорау, принеся с собой эпидемию тифа. Отец Куммера был городским врачом и через несколько недель болезнь унесла его. Потрясенный происшедшим, Куммер поклялся сделать все, что в его силах, чтобы избавить родину от нового вражеского вторжения, — и по окончании университета направил свой интеллект на решение проблемы построения траекторий пушечных ядер. Позднее он преподавал в Берлинском военном училище законы баллистики.

Параллельно с военной карьерой Куммер активно занимался исследованиями в области чистой математики и был полностью осведомлен о происходящем в Французской Академии. Куммер внимательно прочитал публикации в Трудах Академии и проанализировал те немногие детали, которые рискнули раскрыть Коши и Ламе. Ему стало ясно, что оба француза движутся в сторону одного и того же логического тупика, — и свои соображения он изложил в письме к Лиувиллю.

По мнению Куммера, основная проблема заключалась в том, что доказательства Коши и Ламе опирались на использование свойства целых чисел, известного под названием единственности разложения на простые множители. Это свойство означает, что существует

только одна возможная комбинация простых чисел, произведение которых дает данное целое число. Например, единственная комбинация простых чисел, произведение которых дает число 18, имеет вид

18 = 2·3·3 .

Аналогично, числа 35, 180 и 106260 могут быть единственным образом разложены на простые числа, и их разложения имеют вид

35 = 5·7, 180 = 2·2·3·3·5, 106260 = 2·2·3·5·7·11·23 .

Единственность факторизации была обнаружена в IV веке до н. э. Евклидом, который в книге IX своих «Начал» доказал, что это верно для всех натуральных чисел. Единственность разложения на простые множители для всех натуральных чисел — жизненно важный элемент доказательств многих различных теорем и ныне называется основной теоремой арифметики.

На первый взгляд не должно быть никаких причин, по которым Коши и Ламе не могли бы использовать единственность разложения на множители в своих рассуждениях, как это делали сотни математиков до них. Однако, оба представленных Академии доказательства использовали мнимые числа. Куммер обратил внимание Лиувилля на то, что, хотя теорема о единственности разложения на множители выполняется для целых чисел, она не обязательно должна выполняться, если используются мнимые числа. По мнению Куммера, это была роковая ошибка.

Например, если мы ограничимся целыми числами, то число 12 допускает единственное разложение 2·2·3. Но стоит нам допустить в доказательстве мнимые числа, как число 12 можно разложить на множители и так:

12 = (1 + √–11)·(1 + √–11) .

Здесь 1 + √–11 — комплексное число, представляющее собой комбинацию действительного и мнимого числа. Хотя умножение комплексных чисел производится по более сложным правилам, чем умножение действительных чисел, существование комплексных чисел порождает дополнительные способы разложения числа 12 на множители. Приведем еще один способ разложения числа 12:

12 = (2 + √–8)·(2 + √–8) .

Следовательно, при использовании в доказательстве мнимых чисел речь идет не о единственности разложения, а о выборе одного из вариантов разложения на множители.

Таким образом, утрата единственности разложения на множители нанесла тяжелый урон доказательствам Коши и Ламе, но не уничтожила их полностью. Предполагалось, что доказательства должны продемонстрировать несуществование решений в целых числах у уравнения $x^n + y^n = z^n$, где n — любое целое число, бóльшее 2. Как мы уже упоминали в этой главе, в действительности Великую теорему Ферма достаточно доказать только для простых значений n . Куммер показал, что, используя дополнительные ухищрения, можно восстановить единственность разложения на множители при некоторых значениях n . Например, проблему единственности разложения можно обойти для всех простых чисел, не превышающих $n = 31$ (включая само значение $n = 31$). Но при $n = 37$ избавиться от трудностей не так просто. Среди других, прочих чисел, меньших 100, особенно трудно доказать Великую теорему Ферма при $n = 59$ и $n = 67$. Это так называемые нерегулярные простые числа, разбросанные среди остальных чисел, стали камнем преткновения на пути к полному доказательству.

Куммер отметил, что не существует известных математических методов, которые позволили бы единым махом рассмотреть все нерегулярные простые числа. Но он полагал, что, тщательно подгоняя существующие методы к каждому нерегулярному простому числу в отдельности, удастся справиться с ними «по одиночке». Разработка таких выполненных по индивидуальному заказу методов было бы делом медленным и чрезвычайно трудным, и, что еще хуже, множество нерегулярных простых чисел было бесконечным. Рассмотрение нерегулярных простых чисел по одному силами всего мирового математического сообщества растянулось бы до конца веков.

Письмо Куммера произвело на Ламе ошеломляющее действие. Упустить из виду предположение о единственности факторизации! В лучшем случае такое можно было бы назвать чрезмерным оптимизмом, в худшем — непростительной глупостью. Ламе сознавал, что если бы он не стремился держать подробности своей работы в тайне, то смог бы обнаружить пробел гораздо раньше. В письме к своему коллеге Дирихле в Берлин он признавался: «Если бы только Вы были в Париже, или я был в Берлине, все это никогда бы не произошло». Если Ламе испытывал чувство унижения, то Коши отказывался признать поражение. По его мнению, по сравнению с доказательством Ламе, его собственное доказательство в меньшей степени опиралось на единственность разложения на множители, и до тех пор, пока проведенный Куммером анализ не будет полностью проверен, существует возможность, что в рассуждения немецкого математика где-то вкралась ошибка. В течение нескольких недель Коши продолжал публиковать статью за статьей о доказательстве Великой теоремы Ферма, но к исходу лета замолчал и он.

Куммер показал, что полное доказательство Великой теоремы Ферма лежало за пределами возможностей существовавших математических подходов. Это был блестящий образец логики и в то же время чудовищный удар по целому поколению математиков, питавших надежду, что именно им удастся решить самую трудную в мире математическую проблему.

Резюме подвел Коши, который в 1857 году писал в заключительном отчете, представленном Академии, по поводу премии, назначенной за доказательство Великой теоремы Ферма: «Отчет о конкурсе на премию по математическим наукам. Конкурс был назначен на 1853 год и затем продлен до 1856 года. Секретарю были представлены одиннадцать мемуаров. Ни в одном из них поставленный вопрос решен не был. Таким образом, несмотря на многократную постановку, вопрос остается там, где его оставил г-н Куммер. Однако математические науки вознаграждены трудами, предпринятыми геометрами в их стремлении решить вопрос, особенно г-на Куммера, и члены Комиссии считают, что Академия приняла бы достаточное и полезное решение, если бы, изъяв вопрос из конкурса, присудила бы медаль г-ну Куммеру за его прекрасные исследования по комплексным числам, состоящим из корней из единицы и целых чисел».

*** * ***

Более двух столетий любая попытка открыть заново доказательство Великой теоремы Ферма заканчивалась неудачей. В юношеские годы Эндрю Уайлс изучил труды Эйлера, Жермен, Коши, Ламе и, наконец, Куммера. Уайлс надеялся, что ему удастся извлечь уроки из ошибок, допущенных великими предшественниками, но к тому времени, когда он стал старшекурсником Оксфордского университета, на его пути встала та же каменная стена, перед которой остановился Куммер.

Некоторые из современников Уайлса начали подозревать, что проблема Ферма может оказаться неразрешимой. Не исключено, что Ферма заблуждался, и поэтому причина, по которой никому не удалось восстановить доказательство Ферма, заключается просто в том, что такого доказательства вообще не существовало. Уайлса вдохновляло то, что в прошлом, после упорных усилий на протяжении столетий, для некоторых значений n доказательство Великой теоремы Ферма все же было обнаружено. И в некоторых из этих случаев удачные идеи, позволившие решить проблему, не опирались на новые достижения математики; наоборот, это были доказательства, которые могли быть давно быть обнаружены.

Одним из примеров задачи, упорно не поддававшейся решению на протяжении десятилетий, может служить гипотеза о точках. В ней речь идет о нескольких точках, каждая из которых соединена с другими точками прямыми, как показано на рис. 13. Гипотеза утверждает, что невозможно нарисовать диаграмму такого рода так, чтобы на каждой прямой лежали по крайней мере три точки (диаграмму, на которой все точки лежат на одной и той же прямой, мы исключаем из рассмотрения). Экспериментируя с несколькими

диаграммами, мы можем убедиться в том, что гипотеза о точках, по-видимому, верна. На рис. 13*а* пять точек связаны шестью прямыми. На четырех из этих линий не наберется по три точки, и поэтому ясно, что такое расположение точек не удовлетворяет требованию задачи, согласно которому каждой прямой принадлежит по три точки.

***а*)**

***б*)**

Рис. 13. На этих диаграммах каждая точка связана с каждой из остальных точек прямыми. Можно ли построить такую диаграмму, на которой каждая прямая проходит по крайней мере через три точки?

Добавив одну точку и одну проходящую через нее прямую, мы снизили число прямых, на которых не лежат по три точки, до трех. Но дальнейшее приведение диаграммы к условиям гипотезы (такая перестройка диаграммы, в результате которой на каждой прямой оказалось бы по три точки), по-видимому, невозможна. Разумеется, это не доказывает, что такой диаграммы не существует.

Поколения математиков пытались найти доказательство, казалось бы, нехитрой гипотезы о точках — и потерпели неудачу. Эта гипотеза вызывает еще большее раздражение потому, что когда решение в конце концов было найдено, выяснилось, что для него необходимы лишь минимальные познания в математике и один неординарный поворот в рассуждениях. Ход доказательства намечен в Приложении 6.

Вполне возможно, что все методы, необходимые для доказательства Великой теоремы Ферма, уже имелись в распоряжении математиков, и что единственным недостающим ингредиентом был какой-то остроумный ход. Уайлс не собирался сдаваться: детская мечта о доказательстве Великой теоремы Ферма превратилась в глубокое и серьезное увлечение. Ознакомившись со всем, что можно было узнать о математике XIX века, Уайлс решил взять на вооружение методы XX века.

Глава 4. Уход в абстракцию

Доказательство — это идол, которому математики приносят себя в жертву.

Сэр Артур Эддингтон

После работ Эрнста Куммера надежды найти доказательство ослабли, как никогда прежде. Кроме того, в математике начали развиваться различные новые области. Возник риск, что новое поколение математиков останется в неведении относительно неразрешимой проблемы. К началу XX века теорема Ферма все еще занимала особое место в сердцах специалистов по теории чисел, но они относились к ней так же, как химики относятся к алхимии. И алхимия, и Великая теорема Ферма в глазах наших современников выглядят романтическими мечтами прошлого.

В 1908 году Пауль Вольфскель, немецкий промышленник из Дармштадта, вдохнул в старую проблему новую жизнь. Семья Вольфскелей славилась своим богатством и покровительством искусствам и наукам, и Пауль не был исключением. В университете он изучал математику и хотя свою жизнь Пауль посвятил строительству империи семейного бизнеса, все же он поддерживал контакт с профессиональными математиками и продолжал

на любительском уровне заниматься теорией чисел. В частности, Вольфскель не отказался от мысли найти доказательство Великой теоремы Ферма.

Вольфскель отнюдь не был одаренным математиком, и ему не было суждено внести заметный вклад в поиски доказательства Великой теоремы Ферма. Но цепочка неординарных событий привела к тому, что его имя оказалось навсегда связанным с теоремой Ферма и вдохновило тысячи людей заняться поиском ее доказательства.

История начинается с того, что Вольфскель увлекся красивой женщиной, личность которой так никогда и не была установлена. К великому сожалению для Вольфскеля, загадочная женщина отвергла его. Он впал в такое глубокое отчаяние, что решил совершить самоубийство. Вольфскель был человеком страстным, но не импульсивным, и поэтому принялся во всех подробностях разрабатывать свою смерть. Он назначил дату своего самоубийства и решил выстрелить себе в голову с первым ударом часов ровно в полночь. За оставшиеся дни Вольфскель решил привести в порядок свои дела, которые шли великолепно, а в последний день составил завещание и написал письма близким друзьям и родственникам.

Вольфскель трудился с таким усердием, что закончил все свои дела до полуночи и, чтобы как-нибудь заполнить оставшиеся часы, отправился в библиотеку, где стал просматривать математические журналы. Вскоре ему на глаза попалась классическая статья Куммера, в которой тот объяснял, почему потерпели неудачу Коши и Ламе. Работа Куммера принадлежала к числу самых значительных математических публикаций своего века и как нельзя лучше подходила для чтения математику, задумавшему совершить самоубийство. Вольфскель внимательно, строка за строкой, проследил за выкладками Куммера. Неожиданно Вольфскелю показалось, что он обнаружил пробел: автор сделал некое предположение и не обосновал этот шаг в своих рассуждениях. Вольфскель заинтересовался, действительно ли ему удалось обнаружить серьезный пробел, или сделанное Куммером предположение было обоснованным. Если был обнаружен пробел, то имелся шанс, что Великую теорему Ферма удастся доказать гораздо проще, чем полагали многие.

Вольфскель сел за стол, тщательно проанализировал «ущербную» часть рассуждений Куммера и принялся набрасывать минидоказательство, которое должно было либо подкрепить работу Куммера, либо продемонстрировать ошибочность принятого им предположения и, как следствие, опровергнуть все его доводы. К рассвету Вольфскель закончил свои вычисления. Плохие (с точки зрения математики) новости состояли в том, что доказательство Куммера удалось исцелить, и Великая теорема Ферма по-прежнему осталась недоступной. Но были и хорошие новости: время, назначенное для самоубийства, миновало, а Вольфскель был так горд тем, что ему удалось обнаружить и восполнить пробел в работе великого Эрнеста Куммера, что его отчаяние и печаль развеялись сами собой. Математика вернула ему жажду жизни.

Вольфскель разорвал свои прощальные письма и переписал свое завещание в свете случившегося в ту ночь. После его смерти, последовавшей в 1908 году, завещание было оглашено и повергло семью Вольфскеля в шок: выяснилось, что Пауль завещал значительную часть своего состояния в качестве премии тому, кто сумеет доказать Великую теорему Ферма. Премия в 100000 марок (более 1 000 000 фунтов стерлингов в современных масштабах) была той суммой, которую Вольфскель счел своим долгом уплатить в награду за головоломную проблему, спасшую ему жизнь. Деньги были положены на счет Королевского научного общества Гёттингена, которое в том же году официально объявило о проведении конкурса на соискание премии Вольфскеля:

> «Во исполнение воли д-ра Пауля Вольфскеля, скончавшегося в Дармштадте, мы объявляем о создании фонда в сто тысяч марок, каковая сумма и будет вручена тому, кто первым докажет Великую теорему Ферма.
>
> Будут соблюдаться следующие правила.
>
> 1. Королевское научное общество в Гёттингене обладает полной свободой воли в принятии решения, кому надлежит присудить премию. Рукописи,

представленные с единственной целью принять участие в конкурсе на получение премии, приниматься не будут. К рассмотрению допускаются только математические мемуары, представленные в виде статей в периодических изданиях или имеющиеся в книжных лавках. Общество обращается к авторам подобных мемуаров с просьбой присылать по крайней мере пять печатных экземпляров.

2. Работы, опубликованные на языках, непонятных ученым специалистам, выбранным для работы в жюри, не допускаются к участию в конкурсе. Авторам таких работ разрешается заменить их переводами, удостоверившись в точности последних.

3. Общество не берет на себя ответственность за рассмотрение работ, не представленных на конкурс, а также за ошибки, которые могут произойти из-за того, что автор работы или часть работы не известны Обществу.

4. Общество сохраняет за собой право принятия решения в случае, когда к решению проблемы имеет отношение несколько лиц или когда решение является результатом совместных усилий нескольких ученых, в том числе и по вопросам распределения премии.

5. Премия присуждается Обществом не ранее, чем через два года после опубликования мемуара, удостоенного премией. Двухлетний промежуток времени необходим для того, чтобы немецкие и иностранные математики имели возможность высказать свое мнение по поводу опубликованного решения.

6. После того, как состоится присуждение премии Обществом, секретарь от имени Общества уведомляет об этом лауреата. Решение публикуется всюду, где ранее было объявлено о конкурсе на соискание премии. Присуждение премии Обществом обсуждению не подлежит.

7. Выплата премии лауреату производится в течение трех месяцев после присуждения Королевским казначеем Гёттингенского университета или, на ответственность получателя, в любом указанном им месте.

8. Капитал может быть выплачен по желанию Общества под расписку либо наличными, либо переводом финансовых ценностей. Выплата премии считается произведенной при переводе этих финансовых ценностей даже в том случае, если к концу дня сумма премии не достигнет 100000 марок.

9. Если премия не будет присуждена до 13 сентября 2007 года, то дальнейшие заявки не принимаются.

Конкурс на соискание премии Вольфскеля считается открытым с сего дня на приведенных выше условиях.

Гёттинген, 27 июня 1908 г.,
Королевское общество наук »

Следует заметить, что Комиссия выплатила бы 100000 марок первому математику, который доказал бы, что Великая теорема Ферма верна, но тот, кто доказал бы, что теорема Ферма не верна, не получил бы и пфеннига.

О премии Вольфскеля было объявлено во всех математических журналах, и весть о конкурсе быстро распространилась по всей Европе. Несмотря на широкую рекламную кампанию и дополнительный побудительный стимул в виде огромной премии, Комиссии Вольфскеля не удалось вызвать особый интерес у серьезных математиков. Большинство профессиональных математиков считали поиск доказательства Великой теоремы Ферма безнадежным делом и решительно отказывались тратить свое драгоценное время на такое бесполезное занятие. Однако премии Вольфскеля удалось внедрить проблему Ферма в сознание совершенно новой аудитории — невидимой армии жаждущих знания молодых умов, жаждущих испытать себя на решении неприступной головоломки и не видящих ничего зазорного в том, что они приступают к поиску доказательства с явно недостаточным багажом.

Эра загадок и головоломок

С античных времен и поныне математики пытались придать занимательность своим учебникам, излагая теоремы и доказательства в форме решений числовых задач-головоломок. Во второй половине XIX века такой игровой подход к математике проник на страницы общедоступной прессы, и числовые головоломки стали появляться в газетах и журналах наряду с кроссвордами и анаграммами. Растущая день ото дня аудитория жаждала математических головоломок, к числу которых непрофессионалы относили все — от тривиальнейших головоломок до глубоких математических проблем, включая Великую теорему Ферма.

Возможно, самым плодовитым создателем головоломок был Генри Дьюдени, печатавшийся в десятках газет и журналов, в том числе таких, как «Strand», «Cassel's», «The Queen», «Tit-Bits», «The Weekly Dispatch» и «Blightly». Достопочтенный Чарльз Доджсон, лектор по математике колледжа Крайст Черч Оксфордского университета, более известный под литературным псевдонимом Льюис Кэрролл, был еще одним выдающимся автором головоломок викторианской эпохи. Несколько лет Доджсон потратил на то, чтобы собрать обширную коллекцию всяких математических курьезов и головоломок под общим названием «Curiosa Mathematica». Ему не удалось исполнить свой замысел до конца, но несколько книг все же было выпущено, в их числе «Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы».

Но величайшим мастером головоломок был американский гений-самородок Сэм Лойд (1841–1911 гг.), который еще мальчишкой имел вполне приличный заработок, придумывая новые головоломки и усовершенствуя старые. В книге «Сэм Лойд и его головоломки: автобиографический обзор» он признает, что некоторые из его первых головоломок были созданы по заказу владельца цирка и фокусника П. Т. Барнума:

«Много лет назад, когда "Цирк Барнума" был поистине "величайшем зрелищем на Земле", знаменитый шоумен заказал мне серию головоломок, предназначенных быть призами в рекламной кампании. Под названием "Вопросы сфинкса" они приобрели широкую известность из-за крупных призов, предлагавшихся тем, кто сумеет на них ответить».

Интересно, что эта «автобиография» была написана в 1928 году, через 17 лет после смерти Лойда. Свое пристрастие к головоломкам Лойд передал своему сыну, также Сэму, который и был подлинным автором книги «Сэм Лойд и головоломки» и прекрасно знал, что всякий, кто ее купит, будет ошибочно полагать, что ее автор — более известный Сэм Лойд-старший.

Самой знаменитой головоломкой Сэма Лойда стал викторианский эквивалент кубика Рубика — игра в 15, которую и поныне можно встретить в игрушечных лавках. Пятнадцать квадратных шашек с номерами от 1 до 15 находятся в квадратной коробочке размером 4×4. Цель игры состоит в том, чтобы, передвигая шашки в коробочке (но не вытаскивая их), расположить шашки по порядку номеров. В головоломке Лойда «15–14» начальное расположение шашек в коробочке было таким, как на рис. 14. Сэм Лойд предложил значительное вознаграждение тому, кто сумеет решить задачу-головоломку, передвинув шашки (проделав серию ходов) «14» и «15» так, чтобы они расположились в правильном порядке. Сын Лойда описал тот ажиотаж, который вызвала эта «механическая», а на самом деле математическая головоломка:

«Премия в 1000 долларов тому, кто первым правильно решит эту головоломку, так и не была никем востребована, хотя тысячи людей утверждали, будто им удалось добиться желаемого. Люди теряли из-за головоломки «15–14» покой и сон. Рассказывали о владельцах лавок, которые забывали открывать свои заведения, о знаменитом священнике, который простоял всю зимнюю ночь под уличным фонарем, пытаясь припомнить, как ему удалось решить задачу. Самое удивительное во всех этих историях о головоломке «15–14» было то, что никто из «решивших» ее не мог вспомнить последовательность ходов, которая привела к победе. Рассказывали, будто лоцманы сажали суда на мели, а машинисты проскакивали без остановки железнодорожные станции. Известный балтиморский издатель рассказывал, как однажды он отправился на ленч и обнаружил, что сотрудники редакции и типографии самозабвенно играют в пятнадцать с полуночи, гоняя по тарелке кусочки пирога».

Рис. 14. Карикатура с изображением мании, порожденной «Игрой в 15» Сэма Лойда (головоломки, в которой все шашки, кроме двух последних, расположены по порядку)

Лойд был абсолютно уверен в том, что ему не придется выплатить объявленную премию в 1000 долларов, поскольку достоверно знал, что невозможно расположить шашки с номерами «14» и «15», не нарушив при этом правильного расположения каких-нибудь других шашек. Так же, как математик может доказать неразрешимость какого-нибудь уравнения, Лойд мог доказать, что предложенная им головоломка не имеет решения.

Доказательство Лойда начиналось с определения величины, которая служила мерой беспорядка в расположении шашек — параметра беспорядка D_p . Параметр беспорядка данного расположения шашек равен числу пар шашек, у которых больший номер предшествует меньшему, т. е. номера идут в неправильном, обратном, порядке. Для правильного расположения шашек, как на рис. 15*а,* D_p = 0.

***а*) *Dp* = 0**

***б*) *Dp* = 6**

***в*) *Dp* = 12**

Рис. 15. Передвигая шашки внутри коробочки (но не извлекая их из нее), можно создавать различные неупорядоченные расположения чисел. Для каждого расположения можно количественно измерить беспорядок, вводя параметр беспорядка *Dp*

Начав с правильного расположения шашек и передвигая их в коробочке (но не вынимая из нее), сравнительно легко получить расположение, представленное на рис. 15*б* . В нем шашки идут в правильном порядке до тех пор, пока мы не достигнем шашек 12 и 11. Ясно, что шашка с номером 11 должна предшествовать шашке 12, поэтому шашки в этой паре расположены в обратном порядке. Полный список тех пар, в которых шашки расположены в обратном порядке таков: (12,11), (15,13), (15,14), (15,11), (13,11) и (14,11). Таким образом, при расположении шашек, показанном на рис. 15*б* , имеется 6 пар с обратным расположением шашек, и D_p = 6. (Заметим, что шашка 10 соседствует с шашкой 12. Это явно неверно, но такое расположение номеров шашек тем не менее не является обратным, поэтому эта пара шашек не вносит вклада в параметр беспорядка.) Еще несколько ходов, и мы приходим к расположению шашек, представленному на рис. 15*в* . Составив полный список пар шашек с номерами, идущими в обратном порядке, мы обнаружим, что D_p = 12. Важно заметить, что во всех трех случаях *а, б* и *в* , значения параметра беспорядка четны (0, 6 и 12). Действительно, если вы начнете с правильного расположения шашек и будете передвигать их, не вынимая из коробочки, то утверждение о четности параметра беспорядка останется в силе. После любого числа ходов, при расположении шашек с пустой клеткой в правом нижнем углу, значение D_p всегда будет четным.

Иначе говоря, четное значение параметра беспорядка — свойство всех расположении, получаемых из исходного правильного расположения. В математике свойство, которое сохраняется независимо от того, какие действия производятся над объектом, называется инвариантом.

Но если вы проанализируете расположение шашек в головоломке Лойда «15–14», то

обнаружите, что значение параметра беспорядка для нее равно единице: $D_p = 1$, так как только у одной пары с номерами 13 и 15 номера идут в обратном порядке. В головоломке Лойда параметр беспорядка имеет нечетное значение! Но мы знаем, что у любого расположения, полученного из правильного исходного расположения, значение параметра порядка четно. Отсюда следует заключение: расположение шашек в головоломке Лойда «15–14» не может быть получено из правильного исходного расположения, и наоборот, расположение шашек в головоломке Лойда не может быть сведено к правильному расположению. За премию в 1000 долларов Лойд мог быть абсолютно спокоен!

Головоломка Лойда и параметр беспорядка убедительно демонстрируют силу инварианта. Инварианты дают математикам важную стратегию, когда требуется доказать, что один объект невозможно преобразовать в другой. Например, в настоящее время большой интерес вызывает изучение узлов, и специалисты по теории узлов, естественно, пытаются выяснить, можно или нет преобразовать один узел в другой, изгибая и образуя петли, но не разрезая его. Чтобы ответить на этот вопрос, они пытаются найти какое-нибудь свойство исходного узла, которое сохранялось бы при любом изгибании и образовании петель, т. е. инвариант узла. Затем они вычисляют такой же инвариант для второго узла. Если значения инвариантов оказываются различными, то из этого с необходимостью следует вывод о том, что первый узел невозможно преобразовать во второй.

До того, как первые шаги в этом направлении были сделаны Куртом Рейдемейстером в 20-х годах XX века, доказать, что один узел не может быть преобразован в другой, было невозможно. Иначе говоря, до открытия инвариантов узлов было невозможно доказать, что узел «бантиком» невозможно преобразовать в рифовый узел, простой узел или даже простую петлю без какого бы то ни было узла вообще.

Понятие инвариантного свойства занимает центральное место во многих других математических доказательствах, и, как мы увидим в гл. 5, оно сыграло решающую роль в возвращении Великой теоремы Ферма в главное русло развития современной математической мысли.

На стыке XIX и XX веков, благодаря поклонникам Сэма Лойда и его головоломки «15–14», миллионы любителей решать головоломки в Европе и Америке жаждали новых трудных задач. Когда весть о наследстве Вольфскеля дошла до этих начинающих математиков, великая теорема Ферма снова стала самой знаменитой математической проблемой в мире. Великая теорема Ферма была бесконечно более сложной, чем самая трудная из головоломок Лойда, но и приз был несравненно больше.

Любители мечтали о том, что им, возможно, удастся найти сравнительно простой трюк, который ускользнул от внимания великих математиков прошлого. Когда речь заходила о знании математических приемов и методов, преисполненный рвением любитель, живущий в XX веке, во многом не уступал Пьеру де Ферма. Трудность была в другом — в отсутствии изобретательности, с которой Ферма пользовался известными ему приемами и методами.

Через несколько недель после объявления конкурса на соискание премии Вольфскеля на Гёттингенский университет обрушилась лавина «доказательств». Не удивительно, что все они до одного оказались ошибочными. И хотя каждый из участников конкурса был убежден, что именно ему удалось решить проблему, пережившую столетия, но во всех присланных доказательствах неизбежно была какая-нибудь тонкая, а иногда и не очень тонкая — ошибка. Искусство теории чисел настолько абстрактно, что необычайно легко сойти с верного логического пути и незаметно заблудиться, даже впасть в абсурд. В Приложении 7 показана классическая ошибка такого сорта, которую легко может допустить энтузиаст-любитель.

Независимо от того, кто был отправителем того или иного доказательства, каждое из них скрупулезно изучалось на тот случай, если неизвестному любителю все же удастся найти столь давно разыскиваемое доказательство. Деканом математического факультета Гёттингенского университета с 1909 по 1934 годы был профессор Эдмунд Ландау. Именно на него легла обязанность разбирать все доказательства, присланные на соискание премии Вольфскеля.

Ландау был вынужден то и дело прерывать свои собственные исследования, поскольку ему нужно было разбирать десятки ошибочных доказательств, поступавших к нему на стол каждый месяц. Чтобы справиться с ситуацией, профессор Ландау изобрел изящный метод, позволивший избавиться от докучливой работы. Профессор попросил напечатать несколько сотен карточек, на которых значилось:

> Уважаемый(ая) . . . .
>
> Благодарю Вас за присланную Вами рукопись с доказательством Великой теоремы Ферма. Первая ошибка находится на стр … в строке … Из-за нее все доказательство утрачивает силу.
>
> Профессор Э.М. Ландау

Каждое из полученных доказательств вместе с отпечатанной карточкой Ландау вручал одному из своих студентов и просил его заполнить пробелы.

Доказательства продолжали поступать непрерывным потоком в течение нескольких лет даже после того, как премия Вольфскеля катастрофически обесценилась из-за гиперинфляции после первой мировой войны. Говорят, что тот, кто выиграл бы конкурс сегодня, вряд ли смог бы купить на премию чашку кофе, — но такие утверждения несколько преувеличены. Как пояснил д-р Ф. Шлихтинг, ответственный за рассмотрение доказательств в 70-х годах, премия Вольфскеля ныне составляет более 10000 марок. Уникальная возможность составить представление о работе Комиссии Вольфскеля дает письмо д-ра Ф. Шлихтинга Паулю Рибенбойму, приведенное в книге Ф. Шлихтинга «Тринадцать лекций о Великой теореме Ферма».

> «Уважаемый сэр!
>
> Общее число представленных к настоящему времени «решений» неизвестно. В первый год (1907–1908 гг.) в анналах Академии было зарегистрировано 621 решение. В настоящее время в Академии хранятся стопка бумаг, толщиной около трех метров, с материалами переписки по проблеме Ферма. В последние десятилетия работа с письмами производилась следующим образом. Секретарь Академии делил поступающие рукописи по следующим категориям: 1) полная чепуха, которая немедленно отсылалась обратно; 2) материал, который по крайней мере внешне походил на математику.
>
> Вторая часть корреспонденции передавалась математическому факультету, где работа по прочтению рукописей, нахождению ошибок и ответу авторам поручалась одному из ассистентов (в немецких университетах это люди, окончившие полный курс университета и работающие над диссертацией на соискание ученой степени «доктора философии» — Ph.D.). Сейчас очередная жертва — это я. Каждый месяц поступают 3–4 письма, на которые я должен отвечать. В этих письмах масса интересного и любопытного материала. Например, один из корреспондентов прислал половину доказательства и пообещал прислать вторую, если мы выплатим 1000 марок авансом. Другой корреспондент пообещал мне 1% от своих доходов от своих публикаций, интервью на радио и телевидении, когда он станет знаменитым, если только я окажу ему сейчас поддержку. В противном случае он угрожал послать свое доказательство в адрес математического факультета какого-нибудь российского университета и тем самым лишить нас славы его открывателей. Время от времени кто-нибудь из авторов «доказательств» наведывается в Гёттинген и настаивает на личной встрече и обсуждении.
>
> Почти все «доказательства» написаны на самом элементарном уровне (и используют обозначения, заимствованные из высшей математики и, быть может, некоторых плохо усвоенных работ по теории чисел). Тем не менее понять их очень трудно. В социальном плане отправители нередко оказываются людьми с техническим образованием, но с несложившейся карьерой, которые пытаются теперь достичь успеха с помощью доказательства Великой теоремы Ферма.

Некоторые рукописи я передал психиатрам, и те диагностировали тяжелую шизофрению.

Одно из условий в завещании Вольфскеля состояло в том, что Академия была должна ежегодно печатать извещение о конкурсе на соискание премии в главных математических журналах. Но уже через несколько первых лет журналы отказались печатать уведомление о конкурсе потому, что редакции оказались заваленными письмами и сумасшедшими рукописями. Надеюсь, что эта информация представит для Вас некоторый интерес.

Искренне Ваш Ф. Шлихтинг»

Как упоминает д-р Шлихтинг, участники конкурса не ограничивались тем, что присылали свои «доказательства» в Академию. Вряд ли во всем мире найдется хотя бы один математический факультет, где бы ни стоял шкаф, набитый поступившими от любителей «доказательствами». Большинство университетов попросту оставляет такие любительские доказательства без внимания и ответа, но некоторые университеты прибегали к более изобретательным способам, позволявшим отделаться от назойливых корреспондентов. [9] Известный американский популяризатор науки Мартин Гарднер вспоминает об одном своем знакомом, имевшим обыкновение возвращать пришедшие в его адрес рукописи с запиской, в которой извещал отправителя, что недостаточно компетентен для того, чтобы вникнуть в детали доказательства, и сообщал имя и адрес эксперта, который мог бы разобраться в деталях доказательства, т. е. по существу предлагал любителю обратиться к несчастному эксперту. Другой приятель Мартина Гарднера отвечал авторам присланных доказательств так: «У меня есть замечательное опровержение присланного Вами доказательства, но, к сожалению, эта страница недостаточно велика, чтобы вместить его».

Хотя математики-любители всего мира на протяжении XX века пытались найти доказательство Великой теоремы Ферма и терпели одну неудачу за другой в попытках завоевать премию Вольфскеля, математики-профессионалы в основном продолжали игнорировать эту проблему. Вместо того, чтобы опираться в своих исследованиях на труды Куммера и других специалистов по теории чисел, математики обратились у изучению оснований своей науки, чтобы сосредоточить внимание на самых фундаментальных вопросах о числах. Некоторые из величайших фигур XX века — в том числе Бертран Рассел, Давид Гильберт и Курт Гёдель пытались разобраться в наиболее глубоких свойствах чисел, чтобы постичь их истинное значение и установить, какие проблемы теории чисел разрешимы, а какие — что гораздо важнее — неразрешимы. Их работы потрясли основания математики и эхом отозвались на судьбах Великой теоремы Ферма. [10]

Основания знания

---

[9] Сам бы мог привести пару историй с «ферматистами», которые в своё время услышал от зав. кафедрой алгебры нашего местного университета. Но не веселы они: в сущности, эти «ферматисты» — несчастные люди. И на ICM'98 в Берлине, где Эндрю Уайлс получал Филдсовскую премию, на секции алгебры видел доклады типа "А вот ещё одно доказательство Великой теоремы Ферма". Лучше расскажу про одну из "увёрток от ферматистов", которую где-то вычитал. Учёный секретарь одного из московских академических институтов, не избежавшего нашествия ферматистов, однажды был в отпуске в Молдавии и на рынке купил какую-то снедь, которую ему завернули в местную газету. Вернувшись с рынка, он стал просматривать этот листок и наткнулся на заметку, в которой сообщалось, что местный школьный учитель доказал теорему Ферма, и, как следствие, пелись всякие дифирамбы высокому уровню областной науки. Учёный секретарь вырезал эту заметку, а по возвращении в Москву вставил её в рамку и повесил на стену своего кабинета. Теперь, когда на него «нападал» очередной ферматист, он широким жестом приглашал того ознакомиться с "текущим положением дел". Жизнь явно стала легче. :) — E.G.A.

[10] Это не совсем верно. Развивая идеи Куммера, именно в это или близкое время Д. Гильберт, Э. Нётер, Б. Л. Ван дер Варден и другие, придали алгебре и теории чисел современный облик.

На протяжении веков математики занимались тем, что с помощью логического доказательства пытались построить мост, ведущий от известного в неизвестное. Им удалось достичь феноменальных успехов. Каждое новое поколение математиков расширяло грандиозное здание своей науки, создавая новые представления о числах и фигурах. Но к концу XIX века вместо того, чтобы смотреть вперед, некоторые математики стали все чаще оглядываться назад, на основания математики, на которых зиждилось все остальное. Они хотели пересмотреть самые основания математики для того, чтобы заново построить ее, соблюдая все требования математической строгости, начиная с первых принципов, чтобы еще раз убедиться в надежности этих самых первых принципов.

Математики известны своей придирчивостью. Прежде чем принять любое утверждение, они требуют абсолютного доказательства его истинности. Их репутация отчетливо выражена в истории, которую Ян Стюарт приводит в своей книге «Понятия современной математики»: «Рассказывают, что астроном, физик и математик проводили отпуск в Шотландии. Глядя из окна поезда, они заметили посреди поля черную овцу. «Как интересно, — заметил астроном, — все шотландские овцы черные!» «Нет, нет! — возразил физик. — Некоторые шотландские овцы черные!» Математик задумчиво посмотрел вверх, а затем протянул: «В Шотландии есть по крайнее мере одно поле, посреди которого пасется по крайней мере одна овца, у которой по крайней мере одна сторона черная».

Еще строже, чем обычный математик, рассуждает тот математик, который специализируется в области математической логики. Математические логики ставят под сомнение даже те идеи, которые другие математики столетиями считали незыблемыми. Например, закон трихотомии утверждает, что каждое целое число либо отрицательно, либо положительно, либо равно нулю. Это утверждение казалось очевидным, и математики всегда молчаливо предполагали, что оно истинно, но никто никогда не потрудился проверить, так ли это. Логики поняли, что до тех пор, пока истинность закона трихотомии не доказана, его утверждение может оказаться ложным, а если оно окажется ложным, то рухнет все опирающееся на него здание знаний. К счастью для математики, истинность закона трихотомии была доказана в конце XIX века.

Со времен Древней Греции математика накапливала все больше и больше теорем и высказываний, которые не были строго доказаны. Математики были озабочены истинностью некоторых из них, проникших в математический арсенал без должного анализа, — таких, как закон трихотомии. Некоторые идеи были усвоены очень давно, однако, никто не может быть вполне уверен в том, что они могут считаться доказанными, поскольку в разное время были разные представления об уровне строгости доказательства. Поэтому логики решили проверить доказательство каждой теоремы с самого начала. Но каждая истина должна быть выведена из других истин. В свою очередь те истины сначала должны быть доказаны, исходя из еще более фундаментальных истин, и т. д. В конце концов логики оказались лицом к лицу с несколькими утверждениями, настолько фундаментальными, что вывести их из других утверждений не представлялось возможным. Эти фундаментальные утверждения называют аксиомами математики.

Одним из примеров аксиом может служить коммутативный закон сложения, который гласит: для любых чисел m и n верно равенство

$$\mathbf{m + n = n + m}$$

Этот закон и несколько других аксиом принято считать самоочевидными. Они легко могут быть проверены на любых числах. До сих пор аксиомы успешно проходили все проверки и были приняты за основу всей математики. Задача, которую поставили перед собой логики, заключалась в том, чтобы попытаться заново построить всю математику, исходя из этих аксиом. В Приложении 8 приводится набор аксиом арифметики и дается представление о том, как логики намереваются, исходя из них, построить всю остальную математику.

В медленном и болезненном процессе перестройки грандиозного и сложного здания математического знания на основе минимального числа аксиом участвовали очень многие математики. Идея этой перестройки заключалась в том, чтобы обосновать с использованием строжайших стандартов логики то, что математики считали давно известным. Немецкий математик Герман Вейль так описывал настроение того времени: «Логика — это гигиена, правила которой математик соблюдает, чтобы сохранить свои идеи здоровыми и сильными». Кроме того, была надежда, что столь фундаментальный подход позволит пролить свет на еще нерешенные проблемы, в том числе — на Великую теорему Ферма.

Программу обновления математики возглавил один из самых выдающихся ученых XX века — Давид Гильберт. По его глубокому убеждению, все в математике может и должно быть доказано, исходя из основных аксиом. Результат аксиоматического подхода должен был быть доказательно продемонстрирован на двух важнейших элементах математической системы. Во-первых, математика, по крайней мере в принципе, должна быть способна ответить на каждый вопрос в отдельности — это тот самый принцип полноты, который в прошлом требовал введения новых чисел, например, отрицательных и мнимых чисел. Во-вторых, математика должна быть свободна от противоречий, т. е. если истинность некоторого утверждения доказана одним методом, то должна быть исключена возможность доказательства отрицания того же самого утверждения другим методом. Гильберт был убежден, что, приняв всего лишь несколько аксиом, можно ответить на любой мыслимый математический вопрос, не опасаясь впасть в противоречие.

8 августа 1900 года Гильберт выступил с историческим докладом на II Международном конгрессе математиков в Париже. Гильберт сформулировал двадцать три проблемы, имевшие, по его мнению, наибольшее значение. Первые из них были посвящены логическим основаниям математики. По замыслу Гильберта, сформулированные им проблемы должны были привлечь внимание математического мира и стать программой будущих исследований. Гильберт хотел гальванизировать математическое сообщество, чтобы оно помогло реализовать его ви́дение математической системы, свободной от сомнений и противоречий — честолюбивый замысел, суть которого Гильберт завещал высечь на своем надгробии:

Wir mussen wissen, Wir werden wissen.[11]

Огромный вклад в осуществление так называемой гильбертовской программы внес Готтлоб Фреге, временами вступавший в острейшее соперничество с Гильбертом. Более десяти лет Фреге посвятил выводу сотен сложных теорем из простых аксиом, и достигнутые успехи вселили в него уверенность, что он находится на пути к осуществлению значительной части намеченной Гильбертом программы. Одним из ключевых достижений Фреге было создание самого определения числа. Например, что мы в действительности понимаем под числом 3? Оказалось, что для определения числа 3 Фреге понадобилось сначала определить «троичность».

«Троичность» — это абстрактное свойство, присущее всем наборам, или множествам, содержащим по три объекта. Например, «троичность» может быть использована и при описании поросят в известной детской песенке, и при описании множества сторон треугольника. Фреге заметил, что свойством «троичности» обладают многочисленные множества и воспользовался абстрактной идеей таких множеств для определения самого числа «3». Он создал новое множество и поместил в него все множества, обладающие

---

[11] Мы должны знать, мы будем знать (*нем.*)

свойством троичности, и назвал это новое множество «множество 3». Таким образом множество имеет три члена в том и только в том случае, если оно принадлежит «множеству 3».

Для понятия, которым мы пользуемся ежедневно, такое определение может показаться чересчур сложным, но столь строгое описание «множества 3» необходимо для бескомпромисной программы Гильберта.

В 1902 году тяжкий труд, добровольно возложенный на себя Фреге, подошел к концу: Фреге подготовил к печати гигантский двухтомный трактат «Grundgesetze der Arithmetik»[12], который должен был установить в математике новый стандарт строгости.

Тогда же английский логик Бертран Рассел, также внесший немалый вклад в осуществление грандиозного проекта Гильберта, сделал ошеломляющее открытие: строго следуя предписаниям Гильберта, он все же наткнулся на противоречие. Позднее Рассел вспоминал свою собственную реакцию на удручающее осознание того, что вся математика может быть внутренне противоречива: «Сначала я было предположил, что легко и просто сумею преодолеть это противоречие, и что в мои рассуждения, возможно, где-то вкралась какая-нибудь тривиальная ошибка. Но постепенно мне становилось ясно, что это не так… Всю вторую половину 1901 года я надеялся, что решение будет несложным, но к концу года понял, что предстоит нелегкая работа… Я взял за обыкновение бродить каждый вечер с одиннадцати до часу ночи и научился различать три различных звука, которые издает козодой. (Большинству людей знаком лишь один звук.) Я сосредоточенно пытался разрешить полученное мной противоречие. Каждое утро я усаживался перед чистым листом бумаги и весь день (за исключением короткого перерыва на ленч) не сводил с листа глаз. Очень часто, когда наступал вечер, лист так и оставался пустым».

Выхода из этого противоречия не было. Работа Рассела нанесла серьезный урон мечтам о математической системе, свободной от сомнений, противоречий и парадоксов. Он написал Фреге, рукопись книги которого уже находилась в печати. Письмо Рассела практически свело на нет работу всей жизни Фреге, но, несмотря на смертельный удар, Фреге опубликовал свой magnum opus[13], невзирая на сообщение Рассела, и только добавил постскриптум ко второму тому: «Вряд ли что-нибудь может быть более нежелательным для ученого, чем сомнения в своей правоте в тот самый момент, когда он завершает свой труд. Именно в таком положении я оказался, получив письмо от мистера Бертрана Рассела в тот момент, когда моя работа уже должна выйти из печати».

По иронии судьбы, обнаруженное Расселом противоречие выросло из столь любимых Фреге множеств. Через много лет в своей книге «Мое философское развитие» Рассел вспоминал тот яркий ход рассуждений, который оспаривал работу Фреге: «Мне показалось, что множество иногда может, а иногда не может быть членом самого себя. Например, множество чайных ложек само не есть чайная ложечка, а множество вещей, не являющихся чайными ложечками, есть одна из вещей, не являющихся чайной ложечкой». Именно это любопытное и на первый взгляд безобидное замечание Рассела привело к катастрофическому парадоксу.

Парадокс Рассела часто объясняют на примере истории о дотошном библиотекаре. Однажды, проходя между книжных полок, этот библиотекарь набрел на подборку каталогов. Там были отдельные каталоги художественной прозы, библиографических указателей, поэзии и т. д. Библиотекарь отметил, что в одних каталогах имелись ссылки на самих себя, тогда как в других таких ссылок не было.

Чтобы упростить систему регистрации книг, библиотекарь решил составить два новых

---

[12] Фундаментальные законы арифметики (нем.)

[13] Главный труд (*лат* .)

каталога. В один из них он хотел включить все каталоги, содержащие ссылки на самих себя, а в другой — все каталоги, не содержащие ссылки на самих себя. По завершении работы перед библиотекарем встала проблема: нужно ли включать в каталог всех каталогов, не содержащих ссылку на самих себя, его самого? Если его включить, то нарушится условие составления этого каталога. Однако, по тому же условию, он должен быть включен. Наш библиотекарь оказался в безвыходной ситуации. Каталоги в рассмотренном нами примере очень похожи на множества, или классы, которые Фреге использовал в качестве фундаментального определения числа. Следовательно, противоречивость, поразившая библиотекаря, создает проблемы в самой структуре математики, которая по предположению считается логической. В математике нельзя допустить противоречий и парадоксов. Например, такое мощное оружие, как доказательство от противного, опирается на математику, свободную от противоречий. Доказательство от противного утверждает, что если принятое допущение приводит к противоречию, то оно должно быть ложным, а, по Расселу, даже аксиомы могут приводить к противоречию. Следовательно, доказательство от противного могло бы показать, что аксиома ложна, и тем не менее аксиомы образуют основания математики, и их принято считать истинными.

Многие мыслители скептически отнеслись к работе Рассела, ссылаясь на то, что развитие математики до того происходило вполне успешно и не встречало каких-либо парадоксов. Отвечая на критику, Рассел следующим образом объяснял значение своей работы.

> «Но, можете Вы возразить, ничто не поколеблет Вашего убеждения в том, что дважды два равно четыре. Вы совершенно правы — за исключением незначительных частных случаев. Два должно быть двумя чего-то, и утверждение "дважды два равно четырем" бесполезно, если его невозможно применить к чему-либо. Две собаки и две собаки, разумеется, это четыре собаки. Но могут представиться случаи, когда Вы усомнитесь в том, являются ли эти два животных собаками. "Во всяком случае, животных четверо", — могли бы возразить Вы. Но существуют микроорганизмы, относительно которых трудно сказать, животные они или растения. "Прекрасно, — возразите Вы, — пусть будут не животные, а живые организмы". Но есть такие объекты, относительно которых трудно сказать, живые они или нет. Вам не останется ничего другого, как сказать: "Две сущности и две сущности равны четырем сущностям". Если Вы объясните мне, что Вы понимаете под «сущностью», то спор можно будет считать законченным».

Работа Рассела повергла основания математической логики в состояние хаоса. Логики чувствовали, что парадокс, скрывающийся в недрах математики, рано или поздно высунет свою голову и вызовет большие проблемы. Вместе с Гильбертом и другими логиками Рассел предпринял попытку исправить ситуацию и восстановить пошатнувшееся здоровье математики.

Открывшееся противоречие было прямым следствием работы с аксиомами, которые до того предполагались самоочевидными и достаточными для построения остальной математики. Один из выходов заключался в создании дополнительной аксиомы, которая запрещала бы любому множеству быть членом самого себя. Такая аксиома позволила бы одолеть парадокс Рассела, поскольку устраняла бы вопрос о том, включать или не включать в каталог каталогов, не содержащих ссылки на самих себя, сам каталог каталогов.

Следующее десятилетие Рассел занимался анализом того, что составляет самую суть математики, — ее аксиом. В 1919 году он в соавторстве с Альфредом Нортом Уайтхедом опубликовал первый из трех томов «Principia Mathematica». В этой книге они предприняли успешную попытку решить проблему, вызванную парадоксом Рассела. В течение следующих двадцати лет многие математики использовали «Principia Mathematica» в качестве руководства по возведению безупречного здания математики, и к 1930 году, когда Гильберт вышел в отставку, он мог быть уверен в том, что математика находится на верном пути к

выздоровлению. Казалось, мечта Гильберта о непротиворечивой логике, достаточно мощной для того, чтобы ответить на любой вопрос, близится к осуществлению.

Но в 1931 году никому не известный двадцатипятилетний математик опубликовал статью, которая навсегда расстроила надежды Гильберта. Курт Гёдель заставил математиков признать, что математика никогда не станет логически совершенной. Неявно в его работе содержалась и та мысль, что некоторые проблемы математики, например, Великая теорема Ферма, могут оказаться неразрешимыми.

Курт Гёдель родился 28 апреля 1906 года в Моравии, входившей тогда в состав Австро-Венгерской империи, а ныне образующей часть Чехии. В раннем детстве Гёдель перенес несколько заболеваний, самым серьезным из которых был приступ ревматизма в шестилетнем возрасте. Дыхание смерти, которое Гёдель ощутил в столь нежном возрасте, привело к мучительной ипохондрии, которой он страдал всю жизнь. В восьмилетнем возрасте, читая медицинский учебник, Гёдель убедился, что у него слабое сердце, хотя ни один из врачей не находил тревожных симптомов. Позднее, уже в конце жизни, Гёдель ошибочно решил, что его хотят отравить, и, отказавшись от приема пищи, уморил себя голодом.

Еще в детстве Гёдель обнаружил необычайные способности к естественным наукам и математике, и за свою пытливую натуру получил семейное прозвище «господин Почему» (der Herr Warum). Гёдель поступил в Венский университет, так и не сделав выбор между математикой и физикой, но вдохновленный зажигательными и страстными лекциями профессора Ф. Фуртвенглера по теории чисел, решил посвятить себя числам. Лекции были тем более необычными, что Фуртвенглер, парализованный от шеи и ниже, вынужден был читать их, сидя в инвалидной коляске, без конспектов, а его ассистент производил выкладки на доске.

К двадцати с небольшим годам Гёдель стал штатным сотрудником математического факультета, но вместе со своими коллегами нередко участвовал в заседаниях Венского кружка — группы философов, собиравшихся для обсуждения наиболее значительных проблем современной логики. Именно в тот период у Гёделя сложились идеи, подорвавшие самые основания математики.

В 1931 году Гёдель опубликовал свою работу «Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme» 5, в которой содержались его так называемые теоремы о неразрешимости. Когда весть о теореме Гёделя достигла Америки, великий математик Джон фон Нейман тотчас же заменил часть своего курса о программе Гильберта обсуждением революционной работы Гёделя.

Гёдель доказал, что попытка создания полной и непротиворечивой математической системы — задача заведомо невыполнимая. Идеи Гёделя можно кратко сформулировать в двух утверждениях. [14]

Первая теорема о неполноте

Если аксиоматическая теория непротиворечива, то существуют теоремы, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты.

Вторая теорема о неполноте

Непротиворечивость теории не может быть доказана теми методами,

[14] Обе теоремы относятся к достаточно богатой математической теории (например, к аксиоматике Пеано теории целых чисел или системе аксиом Цермело–Френкеля). Следует иметь в виду, что здесь приводятся не точные формулировки теорем, а их популярная интерпретация.

которые в ней формализуются.

По существу, первая теорема Гёделя утверждает, что какая бы система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, — полнота недостижима. Что еще хуже, вторая теорема Гёделя утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, — непротиворечивость никогда не может быть доказана. Гёдель показал, что программа Гильберта неосуществима.

Через несколько десятилетий в своей книге «Портреты по памяти» Бертран Рассел описывал свое впечатление от открытия Гёделя так: «Я жаждал определенности так же, как другие жаждут обрести религиозную веру. Мне казалось, что найти определенность в математике можно с большей вероятностью, чем где-нибудь еще. Но я обнаружил, что многие математические доказательства, которые, в соответствии с ожиданиями моих учителей, мне надлежало принять за истинные, обременены ошибками и что, если определенность действительно может быть обнаружена в математике, то произойдет это в новой области математики с более надежными основаниями, чем те, которые считались надежными прежде. По мере того, как работа продвигалась, мне постоянно приходила на ум басня о слоне и черепахе. Построив слона, на котором мог покоиться математический мир, я обнаружил, что слон нетвердо стоит на ногах, и приступил к построению черепахи, которая удержала слона от падения. Но черепаха оказалась не более надежной, чем слон, и после двадцати с лишним лет напряженнейшего труда я пришел к заключению, что нет ничего, что я бы не сделал, дабы придать математическому знанию непоколебимость».

Вторая теорема Гёделя утверждает, что невозможно доказать непротиворечивость аксиом, но это не обязательно означает, что аксиомы противоречивы. Многие математики все еще верят в глубине сердца, что их математика останется непротиворечивой, но не могут это доказать. Через много лет выдающийся специалист по теории чисел Андре Вейль заметил: «Бог существует потому, что математика непротиворечива, а дьявол существует потому, что мы не можем доказать это».

В действительности, и формулировка и доказательство теорем неполноты Гёделя крайне сложны. Например, строгая формулировка первой теоремы неполноты имеет следующий вид:

> *Каждому ω-непротиворечивому рекурсивному классу κ формул соответствует такой рекурсивный класс ζ знаков r, что ни ν* Gen *r*, *ни* Neg(Gen *r*) *не принадлежит* Flg(*k*) (*где ν — свободная переменная класса r*).

К счастью, подобно тому, как история с библиотекарем помогает понять парадокс Рассела, первую теорему о неполноте Гёделя можно проиллюстрировать на другой логической аналогии, которая принадлежит Эпимениду и известна под названием парадокса критянина, или парадокса лжеца. Эпименид был критянином, который воскликнул:

> Я лжец!

Парадокс возникает, когда мы попытаемся определить, истинно или ложно утверждение Эпименида. Посмотрим, что произойдет, если предположить, что это утверждение истинно. Из истинного утверждения следует, что Эпименид лжец. Но мы приняли предположение о том, что он высказал истинное утверждение, и, следовательно, Эпименид не лжец. Мы приходим к противоречию.

Теперь предположим, что утверждение Эпименида ложно. Из ложности утверждения следует, что Эпименид не лжец. Но мы приняли предположение, что он высказал ложное утверждение. Следовательно, Эпименид лжец, и мы снова приходим к противоречию. Таким образом, что бы мы не предположили об истинности утверждения Эпименида, мы неизменно

приходим к противоречию. Следовательно, утверждение Эпименида не истинно и не ложно.

Гёдель нашел новую интерпретацию парадокса лжеца и ввел понятие доказательства. Результатом его новаций стало следующее утверждение:

Это утверждение не имеет никакого доказательства.

Если бы это утверждение было ложным, то оно было бы доказуемым, но это противоречило бы самому утверждению. Следовательно, во избежание противоречия, утверждение должно быть истинным. Но это утверждение не может быть истинным в силу самого утверждения (о котором мы теперь знаем, что оно должно быть истинным).

Поскольку Гёделю удалось записать это утверждение в математических обозначениях, он смог доказать, что в математике существуют утверждения, которые истинны, но истинность их не может быть доказана, — так называемые неразрешимые утверждения. Для программы Гильберта это было смертельным ударом.

Открытия в области квантовой физики во многом оказались схожи с этой работой Гёделя. За четыре года до того, как Гёдель опубликовал свою работу о неразрешимости, немецкий физик Вернер Гейзенберг открыл принцип неопределенности. Подобно тому, как Гёдель открыл предел, до которого математики могут доказывать свои теоремы, Гейзенберг обнаружил, что существует предел, до которого физики в принципе могут производить измерения свойств. Например, если они хотят измерить точное положение объекта, то скорость того же объекта им удастся измерить лишь со сравнительно большой погрешностью. Связано это с тем, что для измерения положения объекта последний необходимо «обстрелять» фотонами света, но для того, чтобы точно определить положение объекта, фотоны света должны обладать огромной энергией. Но если объект бомбардировать фотонами высокой энергии, то собственная скорость объекта будет испытывать сильнейшие возмущения и станет неопределенной. Следовательно, пытаясь точно определить положение объекта, физики вынуждены поступиться точным знанием его скорости.

Принцип неопределенности Гейзенберга проявляется только на атомных масштабах, когда измерения с высокой точностью приобретают решающее значение. Следовательно, значительная часть физики может продолжать развиваться по-прежнему, в то время как квантовые физики занимаются изучением глубоких вопросов относительно пределов знания. То же самое происходит и в мире математики. В то время как логики ведут доступные пониманию лишь посвященных дискуссии о неразрешимости, остальная часть математического сообщества продолжает свои исследования, не обращая внимание на то, что происходит у логиков. Хотя Гёдель доказал, что существуют некоторые недоказуемые утверждения, в математике существует предостаточно доказуемых утверждений, и его открытие не обесценило доказанных в прошлом теорем. Кроме того, многие математики были убеждены в том, что неразрешимые утверждения Гёделя существуют только в самых «темных» областях математики, находящихся где-то на ее периферии, и что такие неразрешимые утверждения, возможно, никогда не встретятся ни одному математику. Ведь Гёдель утверждал лишь, что такие утверждения существуют, но не привел ни одного из них в качестве примера. Но в 1963 году предсказанный Гёделем теоретический кошмар стал реальностью.

Пауль Коэн, двадцатидевятилетний математик из Стэнфордского университета, разработал метод, позволяющий проверять разрешимость того или иного вопроса. Метод Коэна работает в некоторых весьма специальных случаях, но тем не менее Коэн был первым, кому удалось обнаружить конкретные неразрешимые вопросы. Совершив это открытие, Коэн немедленно вылетел в Принстон. Он хотел, чтобы правильность его работы проверил сам Гёдель. К тому времени Гёдель был тяжело болен (диагноз медиков гласил: паранойя). Он лишь слегка приоткрыл дверь, вырвал из рук Коэна бумаги и захлопнул дверь. Через два дня Коэн получил приглашение в дом Гёделя на чай — знак того, что маэстро скрепил доказательство печатью своего авторитета. Особый драматизм ситуации придало то обстоятельство, что некоторые из неразрешимых вопросов занимают в математике центральное место. По иронии судьбы, Коэн доказал неразрешимость одной из двадцати

трех проблем Гильберта — гипотезы континуума.

Работа Гёделя, дополненная неразрешимыми проблемами Коэна, стала тревожным посланием всем математикам, профессионалам и любителям, которые продолжали свои попытки доказать Великую теорему Ферма. А что, если Великая теорема Ферма неразрешима?! А вдруг Пьер де Ферма заблуждался, когда утверждал, что располагает доказательством? Если так, то доказательство Великой теоремы Ферма может оказаться не просто трудным, а невозможным. Если Великая теорема Ферма неразрешима, то математики столетиями пытались найти доказательство, которое не существует.

Интересно заметить, что если бы Великая теорема Ферма оказалась неразрешимой, то отсюда следовало бы, что она истинна. Причина заключается в следующем. Великая теорема Ферма утверждает, что уравнение

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n}$$

при n , бóльших 2, не имеет решений в целых числах. Если бы Великая теорема Ферма оказалась ложной, то доказать ее было бы можно, предъявив решение (контрпример). Это означало бы, что Великая теорема Ферма разрешима. Итак, если бы теорема была ложной, то это противоречило бы ее неразрешимости. Но если бы Великая теорема Ферма была истинной, то столь определенный способ ее доказательства не обязательно существовал бы, т. е. она могла бы быть неразрешимой. Следовательно, может оказаться, что Великая теорема Ферма истинна, но не существует способа доказать ее.

Из любопытства

Заметка на полях «Арифметики» Диофанта, сделанная рукой Пьера де Ферма, породила одну из самых трудных головоломок в истории математики. Несмотря на триста лет блистательных провалов и предположение Гёделя о том, что возможно, охота идет за несуществующим доказательством, проблема Ферма по-прежнему неудержимо привлекала некоторых математиков. Великая теорема Ферма была математической сиреной, манившей гениев только для того, чтобы вдребезги разбить их надежды. Всякий математик, решивший заняться Великой теоремой Ферма, рисковал напрасно потратить свои наиболее активные годы. Но тот, кому удалось бы совершить решающий прорыв, вошел бы в историю, как человек, нашедший решение самой трудной задачи в мире.

Великая теорема Ферма захватила помыслы поколений математиков по двум причинам. Во-первых, ими двигало неудержимое желание продемонстрировать свое превосходство. Великая теорема Ферма была неоспоримым критерием, и всякий, кто сумел бы ее доказать, добился бы успеха там, где потерпели неудачу Коши, Эйлер, Куммер и многие другие математики. Подобно тому, как сам Ферма получал величайшее удовольствие от решения задач, ставивших в тупик его современников, тот, кому удалось бы найти доказательство Великой теоремы Ферма мог бы порадоваться тому, что сумел решить проблему, которая несколько веков возвышалась неприступной крепостью перед математическим сообществом. Во-вторых, каждый, кому удалось бы ответить на вызов Ферма, мог бы испытать чувство неслыханного удовлетворения от того, что сумел решить труднейшую головоломку. Восторг, получаемый от решения сложнейшей проблемы теории чисел, доступной только пониманию посвященных, мало чем отличается от простой радости от решения тривиальных головоломок Сэма Лойда. Один математик как-то поведал мне, что удовольствие, получаемое им от решения математических проблем, имеет много общего с удовольствием, получаемым от решения кроссвордов. Заполнение последних пустых клеточек особенно трудного кроссворда всегда приносит удовлетворение — но какую же радость должен испытывать тот, кто после многих лет безуспешных попыток решить головоломку, которую до него не удавалось решить никому в мире, все-таки сумел найти решение.

По этим же самым причинам Эндрю Уайлс оказался околдованным волшебными

чарами Великой теоремы Ферма: «Те, кто занимаются чистой математикой, любят вызов. Они в восторге от нерешенных проблем. Когда Вы занимаетесь математикой, Вами овладевает это великое чувство. Вы начинаете с проблемы, которая представляет для вас полную загадку. Вы не можете ее понять — настолько она сложна, Вы не имеете ни малейшего понятия о том, как к ней подступиться. Но вот, наконец, Вам удается решить ее, и Вас охватывает непередаваемое ощущение ее красоты, изящества и соразмерности деталей и целого. Самыми коварными следует считать те задачи, которые кажутся простыми, но на самом деле оказываются необычайно трудными. Великая теорема Ферма — самый прекрасный пример такого рода проблем. Она выглядит так, будто доказательство должно существовать, и к тому же обладает особенной загадочностью: Ферма утверждал, что нашел ее доказательство».

Математика находит многочисленные приложения в науке и технике, но не они служат главным стимулом развития. Ученых вдохновляет радость открытия. Г. Г. Харди в своей книге «Апология математика» попытался объяснить эту особенность науки и оправдать свою деятельность чистого математика:

> «Я только хочу сказать, что если шахматная задача, грубо говоря, «бесполезна», то столь же бесполезна и значительная часть самой лучшей математики… Я никогда не делал ничего «полезного». Ни одно из моих открытий ни на йоту не изменило (и вряд ли изменит), прямо или косвенно, в лучшую или в худшую сторону, прелести мира. Если судить по практическим меркам, то ценность моей математической жизни равна нулю, но в любом случае вне математики она и вовсе бессодержательна. У меня только один шанс избежать вердикта полной бесполезности — если люди сочтут, что мне удалось создать нечто, достойное быть созданным. То, что я создал кое-что, не подлежит сомнению, — вопрос лишь в том, насколько ценно то, что я создал».

В основе стремления решить любую математическую проблему лежит главным образом любопытство, а наградой служит простое, но огромное удовлетворение. Математик Э.Ч. Титчмарш однажды сказал: «От того, что мы знаем, что некоторое число иррационально, нет никакой практической пользы, но если мы можем знать нечто, то не знать этого становится невыносимо».

В случае Великой теоремы Ферма недостатка в любопытстве не было. Работа Гёделя о неразрешимости внесла элемент сомнения в вопрос о том, разрешима ли проблема Ферма, но истинных фанатиков Великой теоремы Ферма это ничуть не разочаровало. Гораздо более разочаровывающим было то, что с 30-х годов математики исчерпали все имевшиеся у них методы, а новых методов появилось явно недостаточно.

Вторая мировая война обусловила гигантский скачок в развитии со времен изобретения логарифмической линейки. И следующим этапом в направлении доказательства теоремы Ферма стало развитие вычислительной техники и криптографии.

Подход с позиций грубой силы

Когда в 1940 году Г.Г. Харди заявил о том, что самая первоклассная математика в основном бесполезна, он тут же был вынужден добавить, что это не обязательно плохо: «Настоящая математика не оказывает влияния на ведение войн. Никто еще не открыл ни одного применения теории чисел в военных целях». Вскоре выяснилось, что Харди заблуждался.

В 1944 году Джон фон Нейман в соавторстве с Оскаром Моргенштерном написал книгу «Теория игр и экономическое поведение», в которой ввел придуманный им термин «теория игр». Фон Нейман попытался использовать математику для описания структуры игр и того, как люди играют в них. Он начал с шахмат и покера, а затем попытался построить модели более сложных игр — таких, как экономика. После второй мировой войны корпорация

RAND оценила потенциал идей фон Неймана и пригласила его принять участие в разработке стратегии холодной войны. С той поры математическая теория игр стала основным средством, с помощью которого генералы проверяют разрабатываемые ими стратегии, рассматривая вооруженные конфликты как усложненный вариант шахматных партий. Простой иллюстрацией применения теории игр к анализу военных операций служит задача о труэли.

Труэль аналогична дуэли, но с тремя участниками вместо двух. Однажды утром м-р Блэк, м-р Грей и м-р Уайт вздумали решить конфликт труэлью на пистолетах. Стрелять условились до тех пор, пока в живых не останется только один из участников. М-р Блэк стрелял хуже всех. В цель он попадал в среднем лишь один раз из трех. М-р Уайт стрелял лучше всех — без промаха. Чтобы уравнять шансы участников труэли, м-ру Блэку разрешено стрелять первым, за ним должен стрелять м-р Грей (если он останется в живых), затем мог стрелять м-р Уайт (если он еще будет жив).

Далее все начиналось снова, и так до тех пор, пока в живых не останется только один из участников труэли. Вопрос: в кого должен выстрелить м-р Блэк, производя свой первый выстрел? Вы можете попытаться ответить на этот вопрос, опираясь на свою интуицию, но лучше все же, если ваш ответ будет основан на теории игр. Решение задачи см. в Приложении 9.

Большое значение в военное время приобрела математическая теория криптографии — наука о конструировании и «взламывании» кодов. Во время второй мировой войны союзники поняли, что математическая логика может оказаться полезной для дешифровки немецких радиограмм, если только вычисления проводить достаточно быстро. Требовалось автоматизировать математические вычисления, чтобы их могла производить машина, и более других способствовал раскрытию немецких кодов английский математик Алан Тьюринг.

В 1938 году Тьюринг вернулся в Кембридж после стажировки в Принстонском университете. Он стал свидетелем того переполоха, который вызвали теоремы Гёделя о неразрешимости, и принял участие в попытках спасти осколки мечты Гильберта.

В частности, Тьюринг захотел выяснить, существует ли способ, позволяющий определить, какие проблемы разрешимы и какие неразрешимы, и попытался разработать метод, дающий ответ на этот вопрос. В те времена вычислительные устройства были весьма примитивными и, по существу, бесполезными, когда дело касалось серьезных задач. Поэтому Тьюринг основывал свои идеи не на реальных компьютерах, а на представлении о некоторой воображаемой машине, способной неограниченно производить вычисления.

Все, что требовалось Тьюрингу для исследования абстрактных логических проблем, — гипотетическая машина, снабженная бесконечной воображаемой лентой, разделенной на клетки, и способная неограниченно производить вычисления. Тьюринг и не подозревал, что предложенная им воображаемая автоматизация решения гипотетических проблем в конечном счете приведет к перевороту в выполнении реальных вычислений на реальных машинах.

Несмотря на начавшуюся войну, Тьюринг продолжал свои исследования в Кингс Колледже до 4 сентября 1940 года, когда размеренной жизни его кембриджского дома внезапно пришел конец. Тьюринг был командирован в Правительственную школу кодов и шифров, в задачу которой входила расшифровка данных вражеских радиоперехватов. Еще в довоенные годы немцы предприняли значительные усилия для разработки великолепной системы шифрования, и достигнутые ими успехи в этой области стали предметом особых забот британской разведки, которая до того с легкостью расшифровывала вражеские радиограммы. В официальной истории войны, выпущенной издательством Ее Величества под названием «Британская разведка во второй мировой войне», состояние дел в 30-х годах описывается следующим образом:

«В 1937 году было установлено, что в отличие от своих японских и итальянских аналогов, германская армия, германский военно-морской флот, возможно, германские

военно-воздушные силы вместе с другими государственными организациями, вроде железных дорог и СС, использовали для всех нужд, кроме тактических коммуникаций, различные версии одной и той же шифровальной системы — шифровальной машины «Энигма», выпущенной на рынок в 20-е годы. Надежность ее немцы повышали, внося различные усовершенствования. В 1937 году Правительственной школе кодов и шифров удалось раскрыть устройство менее модифицированной и менее надежной модели машины «Энигма», используемой германскими, итальянскими и испанскими вооруженными силами. Не считая этого случая, «Энигма» до сих пор выдерживала все попытки раскрыть ее устройство. Весьма вероятно, что эти попытки будут продолжены».

Шифровальная машина «Энигма» состояла из клавиатуры, соединенной с шифровальным узлом. Шифровальный узел содержал три отдельных ротора. Положения роторов определяли, как шифруется каждая литера на клавиатуре. Раскрыть код «Энигма» было так трудно потому, что число внутренних состояний, в которых могла находиться машина, было необычайно велико. Во-первых, три ротора в машине можно было выбирать из пяти, заменять и переставлять, чтобы сбить с толку тех, кто попытается раскрыть код. Во-вторых, каждый ротор мог находиться в одном из двадцати шести. различных положений. Все это означало, что машина может находиться более чем в миллионе различных состояний. Кроме перестановок букв, производимых роторами, соединения на плате в тыльной стороне машины можно было менять вручную, что позволяло устанавливать машину более чем в $1{,}5 \cdot 10^{20}$ возможных состояний. Чтобы еще больше увеличить надежность, три ротора постоянно изменяли ориентацию так, что после кодирования и передачи одной буквы при кодировании следующей буквы машина устанавливалась в новое состояние. Например, набрав на клавиатуре «DODO», мы получим кодированное сообщение «FGTB», так как хотя буквы «D» и «O» встречаются в сообщении дважды, кодируются они всякий раз по-другому.

Машины «Энигма» были взяты на вооружение германской армией, военно-морским флотом и военно-воздушными силами, а также использовались на железных дорогах и в других правительственных учреждениях. Подобно всем системам кодов того времени, «Энигма» имела слабое место: получатель должен был знать, как установлена машина отправителя. Для обеспечения безопасности установку «Энигмы» требовалось менять ежедневно. Один из способов, позволявших отправителю ежедневно менять код и сообщать его получателю, заключался в публикации установок машины на каждый день в секретной кодовой книге. Риск при такой системе состоял в том, что англичане могут захватить какую-нибудь немецкую подводную лодку и захватить кодовую книгу с ежедневными установками машины на следующий месяц. Альтернативный подход, который использовался на протяжении большей части войны, состоял в том, чтобы установка машины на текущий день сообщалась в преамбуле к сообщению и декодировалась с помощью кода на предыдущий день.

Когда разразилась вторая мировая война, штат Правительственной школы кодов и шифров в основном состоял из специалистов по древним языкам и лингвистов. Но вскоре британское министерство иностранных дел осознало, что специалисты по теории чисел имеют более высокие шансы подобрать ключ к немецким кодам, и тогда самые лучшие английские специалисты по теории чисел были собраны в новом здании Правительственной школы кодов и шифров в Бличли парке — викторианском здании в Бличли, в графстве Бакингхэмпшир. Тьюрингу пришлось оставить свои воображаемые машины с бесконечной лентой, разделенной на клетки, и бесконечным временем на обработку информации и заняться практической проблемой с конечными ресурсами и весьма сжатыми сроками.

Криптография представляет собой борьбу умов между составителем кода и тем, кто пытается этот код разгадать. Составитель кода видит свою задачу в том, чтобы каждое исходящее от отправителя сообщение было закодировано настолько надежно, чтобы раскодировать его было невозможно даже в том случае, если оно будет перехвачено противником. Однако существует верхний предел для количества возможных

математических манипуляций, поскольку сообщения должны доходить до получателя быстро и эффективно. Сила германского кода «Энигма» заключалась в том, что кодируемое сообщение подвергалось кодировке на нескольких уровнях с очень высокой скоростью. Тот, кто стремился раскрыть, или «взломать», код, видел свою задачу, в том, чтобы взять перехваченное сообщение и разгадать код, причем скорость расшифровки была весьма существенна: германское сообщение, содержащее приказ потопить британский корабль, должно было быть декодировано до того, как корабль потонет.

Тьюринг возглавил группу математиков, в задачу которых входило воссоздать точную копию машины «Энигма». Все свои абстрактные идеи предвоенной поры Тьюринг воплотил в устройстве, которое теоретически могло методично, одну за другой, перебирать все возможные установки машины «Энигма» до тех пор, пока код не окажется раскрытым. Для проверки всех потенциально возможных состояний машины «Энигма» математики из Бличли парка использовали британские машины около двух метров в высоту и примерно столько же в ширину, работавшие на электромеханических реле. Непрестанное тиканье реле стало причиной, по которой эти машины получили свое прозвище — их стали называть бомбами. Несмотря на максимальное по тем временам быстродействие, «бомбы» не могли перебрать за разумное время все гигантское количество возможных вариантов установки «Энигма», поэтому группе Тьюринга предстояло найти способы, позволяющие существенно сократить число перестановок, по крохам собирая любую информацию, которую можно было извлечь из перехваченных сообщений.

Одно из существенных достижений группы из Бличли парка стало осознание того, что машина «Энигма» никогда не кодировала букву самой буквой, т. е. если отправитель набирал на клавиатуре литеру «R», то машина потенциально могла отправить любую другую букву (в зависимости от установки машины), кроме буквы «R». Это, на первый взгляд незначительное, обстоятельство позволило резко сократить время, необходимое для того, чтобы декодировать сообщение. Немцы нанесли ответный удар, ограничив длину предаваемых сообщений. Все сообщения неизбежно содержат в себе какие-то зацепки, позволяющие «взломщикам кодов» декодировать сообщения. Чем длиннее сообщение, тем больше зацепок оно содержит. Установив предельный объем для всех сообщений — не более 250 знаков, немцы надеялись компенсировать «нежелание» машины «Энигма» кодировать букву той же буквой.

Чтобы взломать германские коды, Тьюринг часто пытался отгадать в сообщениях ключевые слова. Если ему это удавалось, то декодирование остальной части сообщения многократно ускорялось. Например, если взломщики кода подозревали, что сообщение содержит сводку погоды (метеоданные часто передавались в кодированных сообщениях), то они могли предположить, что в сообщении содержатся такие слова, как «туман» или «скорость ветра». Если их догадка оправдывалась, то они быстро декодировали остальное сообщение и тем самым могли судить об установке «Энигмы» на день передачи сообщения. Тогда в этот день и другие, более ценные, сообщения декодировались без труда.

Если же слова о состоянии погоды не удавалось отгадать, то англичане пытались представить себя на месте немецких операторов, работавших с «Энигма», и отгадать какие-то другие ключевые слова. Оператор по рассеянности мог назвать получателя по имени или обладать какими-то известными взламывателю кода любимыми словечками. Если все попытки декодировать сообщения оказывались безуспешными, и германский радиообмен протекал бесконтрольно, Правительственная школа кодов и шифров прибегала, как рассказывают, даже к такой экстравагантной мере, как обращение к командованию Королевскими ВВС с просьбой произвести минирование какого-нибудь германского порта. Комендант порта немедленно посылал кодированное сообщение, которое англичане перехватывали. В подобных случаях взломщики кодов могли быть уверены, что в сообщении непременно содержатся такие слова, как «мины», «опасность для захода кораблей», «пеленгация мест падения мин». Декодировав такое послание, Тьюринг устанавливал установку «Энигма» на тот день, и дальнейший радиообмен немцев уже легко поддавался

декодированию.

1 февраля 1942 года немцы установили дополнительный, четвертый, ротор на машине «Энигма», предназначенный для передачи особо секретной информации. Это было самое большое повышение уровня кодирования за время войны, но группа Тьюринга сумела парировать этот ход немцев, увеличив эффективность своих «бомб». Благодаря усилиям сотрудников Школы кодов и шифров, союзники знали о противнике больше, чем могли подозревать немцы. Эффективность операций германских подводных лодок сильно уменьшилась, и британцам удалось предупредить налеты германских ВВС. Взломщикам кодов из Бличли парка также удалось перехватить и декодировать сообщения, содержавшие точные координаты вспомогательных кораблей германского ВМФ, что позволило послать британские бомбардировщики и потопить эти корабли.

Союзникам приходилось принимать особые меры предосторожности для того, чтобы неожиданные атаки не выдали их осведомленности и чтобы немцы не догадались о том, что их сообщения могут быть декодированы. Если бы немцы заподозрили, что система «Энигма» поддается декодированию, то они могли бы повысить уровень кодирования, и англичане оказались бы на исходных позициях. Поэтому в ряде случаев Школа кодов и шифров информировала военных о планируемой атаке, но командование предпочитало не принимать особых контрмер. Ходили даже слухи, что Черчиллю было известно о готовящемся опустошительном налете на Ковентри, но он предпочел не принимать особых мер предосторожности, чтобы немцы ничего не заподозрили. Стюарт Милнер-Барри, работавший вместе с Тьюрингом, опровергает эти слухи и утверждает, что сообщение о готовящемся налете на Ковентри удалось декодировать, когда уже было поздно.

Ограниченное использование декодированной информации работало идеально. Даже когда англичане использовали перехваченные сообщения для предотвращения тяжелых потерь, немцы не заподозрили, что код «Энигма» раскрыт. Немцы были убеждены, что их уровень кодирования настолько высок, что раскрыть их коды абсолютно невозможно. Свои огромные потери немцы относили за счет агентов британской секретной службы, якобы проникших в высшие ряды немецкого командования.

Из-за секретности, окружавшей работу в Бличли парке, огромный вклад Тьюринга и его группы в победу союзников не мог быть признан публично даже через много лет после окончания войны. Принято говорить, что первая мировая война была войной химиков, а вторая мировая война стала войной физиков. В действительности, судя по той информации, которая стала известна за последние десятилетия, по-видимому, правильнее было бы сказать, что вторая мировая война была также войной математиков. В случае третьей мировой войны вклад математиков был бы еще более значительным.

Но и в самый разгар своей деятельности в качестве взломщика кодов Тьюринг не забывал о своих чисто математических исследованиях. На смену воображаемым машинам пришли реальные, но тонкие вопросы, доступные пониманию только посвященных, оставались нерешенными. К концу войны Тьюринг оказал помощь в постройке «Колосса» — полностью электронной вычислительной машины, на 1500 электронных лампах, работавших гораздо быстрее, чем электромеханические реле, которые использовались в «бомбах». «Колосс» был компьютером в современном смысле слова. Необычайное (по тем временам) быстродействие и достаточно высокая сложность «Колосса» навели Тьюринга на мысль рассматривать эту вычислительную машину как примитивный мозг: «Колосс» обладал памятью, он мог обрабатывать информацию, и внутренние состояния компьютера напоминали состояния человеческого мозга. Свою воображаемую машину Тьюринг превратил в первый реально действующий компьютер.

По окончании второй мировой войны Тьюринг продолжал строить все более сложные вычислительные машины, такие, как Automatic Computing Engine (ACE) — Автоматическую вычислительную машину. В 1948 году Тьюринг перешел на работу в Манчестерский университет и построил первый в мире компьютер с программой, которая хранилась в электронном виде. Благодаря Тьюрингу, Британия стала обладательницей самых мощных

компьютеров в мире, но он прожил он недостаточно долго для того, чтобы увидеть наиболее выдающиеся успехи компьютерных вычислений.

В послевоенные годы Тьюринг находился под наблюдением Intelligence Service. Разведчики, считая Тьюринга гомосексуалистом и опасаясь, что человек, знающий о британских секретных кодах больше, чем кто-либо другой, может стать объектом шантажа, следили за каждым его шагом. Тьюринг даже смирился, что неотступно находится под колпаком у разведслужб, но в 1952 году был арестован за нарушение британских законов о гомосексуалистах. Это унижение стало для Тьюринга последней каплей, переполнившей его терпение. Эндрю Ходжес, биограф Тьюринга, так описывает событие, приведшее к его смерти: «Смерть Алана Тьюринга стала сильнейшим потрясением для всех, кто его знал… То, что он был несчастным человеком, находившимся в состоянии нервного напряжения, что он консультировался у психиатра и, как и многие другие, перенес удар, — все это было ясно. Но суд состоялся два года назад, лечение гормонами закончилось годом раньше, и он, казалось, стал выше всего этого.

Расследование, произведенное 10 июня 1954 года, установило, что это было самоубийство. Тьюринга нашли лежащим навзничь в постели. Вокруг его рта была пена. Патологоанатом, проводивший посмертное вскрытие, определил причину смерти как отравление цианидом калия… В доме находился сосуд с цианидом калия и еще один сосуд с раствором цианида. Рядом с кроватью лежала половинка яблока со следами укусов. Анализ яблока не производился».

* * *

Наследием Тьюринга стал компьютер, способный производить за несколько часов вычисления, которые заняли бы у человека непозволительно много времени. Современные компьютеры успевают за долю секунды произвести больше арифметических операций, чем Ферма сделал за всю свою жизнь. Те математики, которые все еще вели неравную борьбу с Великой теоремой Ферма, начали компьютерную атаку на проблему, полагаясь на компьютерную версию подхода, развитого Куммером в XIX веке.

Куммер, обнаружив пробел в работах Коши и Ламе, установил, что трудностей при доказательстве Великой теоремы Ферма удается избежать, если показатель n равен нерегулярному простому числу (при n, не превышающих числа 100, нерегулярны только простые числа 37, 59 и 67). В то же время, Куммер показал, что теоретически все случаи с нерегулярными значениями показателя n могут быть рассмотрены индивидуально. Единственная проблема заключается лишь в том, что каждый случай требует огромного объема вычислений. Сколь велик объем вычислений наглядно демонстрирует то, что Куммер и его коллега Дмитрий Мириманов потратили три недели, чтобы выполнить все вычисления для трех нерегулярных простых чисел, не превышающих числа 100. Но ни они, ни другие математики не были готовы к тому, чтобы приступить к вычислениям для следующей группы нерегулярных простых чисел в интервале от 100 до 1000.

Через несколько десятилетий проблемы, связанные с огромным объемом вычислений, стали существенно более доступными. С появлением компьютера большому объему вычислений, связанных с доказательством Великой теоремы Ферма, стало возможно противопоставить быстродействие вычислительных машин. И после второй мировой войны группы программистов и математиков доказали Великую теорему Ферма при всех значениях n до 500, затем до 1000, а позже до 10000. В 80-е годы Сэмюэль С. Вагстафф из университета Пурду поднял предел до 25 000, а совсем недавно математики заявили, что Великая теорема Ферма верна при всех значениях n до 4 миллионов.

И хотя нематематикам могло бы показаться, что положение с доказательством Великой теоремы Ферма, наконец, стало лучше, математическое сообщество сознавало, что успех носит чисто косметический характер. Даже если бы суперкомпьютеры провели десятилетия в непрерывных вычислениях, доказывая Великую теорему Ферма при значениях n одно за

другим, то и тогда им не удалось бы доказать теорему для каждого значения n до бесконечности, и поэтому никто не мог бы утверждать, что Великая теорема Ферма доказана во всей общности. Ведь даже если бы теорему удалось доказать для n до миллиарда, то и тогда не было бы никаких причин, по которым она должна была бы быть верна для n, равного миллиарду плюс один. Если бы теорему удалось доказать для n до триллиона, то нет причин, по которым она должна была бы быть верна для n, равного триллиону плюс один, и т. д. до бесконечности. Бесконечность недостижима за счет одной лишь грубой силы — перемалывания чисел с помощью компьютера.

Дэвид Лодж в своей книге «Странствия в картинках» приводит красочное описание вечности, имеющее отношение к аналогичному понятию бесконечности: «Представьте себе стальной шар размером со Вселенную и муху, которая садится на него раз в миллион лет. Когда этот стальной шар обратится в пыль от трения, вечность еще даже не начнется». Тем не менее, результаты, полученные с помощью компьютеров, свидетельствовали в пользу Великой теоремы Ферма. Поверхностному наблюдателю могло показаться, что этих результатов предостаточно, но сколько бы ни было данных, любое их количество не могло удовлетворить математиков — сборище скептиков, которые не признают ничего, кроме абсолютного доказательства. Экстраполяция теории на бесконечное множество чисел, опирающаяся на результаты, полученные для конечного количества чисел, — игра рискованная (и неприемлемая).

Насколько опасна такая экстраполяция с конечного множества на бесконечное показывает одна последовательность простых чисел. В XVIII веке математики доказали, что все следующие числа простые:

31, 331, 3 331, 33 331, 333 331, 3 333 331, 33 333 331 .

Следующие числа становились все бóльшими гигантами, и проверка их на простоту потребовала бы значительных усилий. Некоторые математики поддались искушению выдать замеченную закономерность за правило и предположили, что все числа указанного вида простые. Но уже следующее число 333 333 331 оказалось составным: 333 333 331 = 17·19 607 843.

Другим хорошим примером, показывающим почему не следует доверять только результатам компьютерных расчетов, может служить гипотеза Эйлера. Эйлер предположил, что уравнение

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4,$$

аналогичное уравнению Ферма, не имеет ненулевых решений в целых числах. На протяжении двух столетий никому не удавалось доказать гипотезу Эйлера, как, впрочем, и опровергнуть ее контрпримером. Ни первые вычисления вручную, ни долгие годы просеивания чисел с помощью компьютеров не позволили обнаружить ни одного решения. Отсутствие контрпримера воспринималось как убедительное свидетельство в пользу гипотезы Эйлера. Но в 1988 году Наум Элькис из Гарвардского университета нашел следующее решение:

$$\mathbf{2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 187\,960^4 = 20\,615\,673^4}.$$ [15]

Несмотря на все «подкрепляющие» данные гипотеза Эйлера оказалась ложной. В действительности Элькис доказал, что это уравнение имеет бесконечно много решений в целых числах. Мораль ясна: нельзя использовать результаты, полученные для первого миллиона целых чисел, как обоснование гипотезы относительно всех целых чисел.

Но обманчивый характер гипотезы Эйлера — ничто по сравнению с гипотезой о завышенной оценке количества простых чисел. Рассматривая все бóльшие и

---

[15] А Роджер Фрай (как сказано в "Конкретной математике" Р. Грэхема, Д. Кнута и О. Паташника) затратив 110 часов работы суперкомпьютера Connection Machine, показал, что единственным решением для $w < 1\,000\,000$ является $95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4$. — E.G.A.

бóльшие целые числа, мы убеждаемся, что найти среди них простые числа становится все труднее. Например, между 0 и 100 расположены 25 простых чисел, тогда как между 10 000 000 и 10 000 100 — только 2 простых числа. В 1791 году Карл Гаусс, которому было тогда всего лишь четырнадцать лет, сформулировал приближенный закон, по которому уменьшается частота простых чисел. Формула Гаусса давала разумную точность, но всегда слегка завышала истинное распределение простых чисел. Проверка на простых числах до миллиона, миллиарда или триллиона показала, что гипотеза Гаусса излишне щедра, и математики испытывали сильнейшее искушение считать, что так будет и для всех чисел до бесконечности. Так родилась гипотеза о завышенной оценке распределения простых чисел.

В 1914 году Дж. И. Литлвуд, сотрудник Г.Г. Харди по Кембриджскому университету доказал, что для очень больших чисел формула Гаусса даст заниженную оценку распределения простых чисел. В 1955 году С. Скьюз показал, что недооценка количества простых чисел может наступить прежде, чем будет достигнуто число

Это число невозможно даже представить, и никаких практических приложений оно не имеет. Харди назвал число Скьюза «самым большим числом, которое когда-либо служило какой-нибудь цели в математике». Харди подсчитал, что если бы кто-нибудь вздумал сыграть в шахматы со всеми частицами во Вселенной (а их 10^{87}; под ходом в такой игре следовало бы понимать перестановку любых двух частиц), то число возможных партий оказалось бы приближенно равно числу Скьюза.

Не существует причин, по которым Великая теорема Ферма не могла бы оказаться столь же обманчивой, как гипотеза Эйлера или гипотеза о завышенной оценке распределения простых чисел.

Аспирантские годы

В 1975 году Эндрю Уайлс поступил в аспирантуру Кембриджского университета. В ближайшие три года ему предстояло работать над диссертацией на соискание ученой степени Ph.D. (доктора философии) и за это время как бы пройти свое послушание математика-подмастерья. У каждого аспиранта имеется свой руководитель и наставник. У Уайлса им был австралиец Джон Коутс, профессор из колледжа Эммануэля, живший у себя на родине в городке Посум Браш в Новом Южном Уэльсе.

Коутс хорошо помнит, как он принял Уайлса: «Помню, что коллега сообщил мне о своем очень сильном студенте, который только что сдал последнюю часть экзаменов по математике и настоятельно рекомендовал мне взять его в аспирантуру. К счастью, я знал Эндрю еще в бытность его студентом. Еще тогда у него были очень глубокие идеи, и было ясно, что он математик с большим будущим. Разумеется, в то время не было и речи о том, чтобы какой-нибудь аспирант работал непосредственно над доказательством Великой теоремы Ферма. Она слишком трудна и для более опытного математика».

В последнее десятилетие все, что делал Уайлс, было направлено на подготовку к решающей схватке с Великой теоремой Ферма, но теперь, когда он вступил в ряды профессиональных математиков, ему приходилось быть более прагматичным. Как вспоминает Уайлс, он был вынужден временно отказаться от своей мечты. «Придя в Кембридж, я отложил Ферма в сторону. Не то, чтобы я забыл о теореме — она всегда была со мной, но я вдруг осознал, что те методы, которыми мы пытались доказать ее, существовали уже около 130 лет. По-видимому, они не позволяли дойти до корней проблемы. Работая над доказательством теоремы Ферма, вы могли потратить годы и остаться ни с чем. Работать над любимой проблемой — одно удовольствие, пока получается интересная математика, даже если проблему не удается решить к концу дня. Хорошей математической проблемой по определению считается такая, которая порождает хорошую математику. Важна математика, а не сама проблема».

Эндрю Уайлс во время обучения в колледже

Джон Коутс, научный руководитель Уайлса в 70-е годы, продолжал поддерживать отношения со своим бывшим студентом

В обязанности Джона Коутса входило найти для Эндрю новую увлекательную проблему, которая станет предметом его исследования по крайней мере на следующие три года. «Думаю, все, что руководитель может сделать для аспиранта, — это попытаться дать ему толчок в правильном направлении. Разумеется, никто не может с уверенностью знать заранее, какое направление исследования окажется плодотворным, но одно старший по возрасту математик может сделать — использовать свое чутье, свою интуицию при выборе стоящей области исследования, а от аспиранта зависит, насколько ему удастся продвинуться в указанном направлении». В конце концов Коутс решил, что Уайлсу следовало бы заняться областью математики, известной под названием теории эллиптических кривых. Как впоследствии оказалось, это решение стало поворотным пунктом в судьбе Уайлса и вооружило его теми методами, которые понадобились при выработке нового подхода к доказательству Великой теоремы Ферма. Название «эллиптические кривые» способно ввести в заблуждение потому, что они не эллипсы и даже не кривые в обычном смысле слова. Речь, скорее, идет об уравнениях вида

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа.

Свое название эллиптические кривые получили потому, что некоторые функции, тесно связанные с этими кривыми, потребовались для измерения длин эллипсов (а, следовательно, и длин планетных орбит). Уравнения такого вида называются кубическими. Проблема эллиптических кривых, как и проблема доказательства Великой теоремы Ферма, заключается в вопросе, имеют ли соответствующие им уравнения целочисленные решения, и если имеют, то сколько. Например, кубическое уравнение

$y^2 = x^3 - 2$,

где $a = 0$, $b = 0$, $c = -2$, имеет только одно решение в целых числах, а именно:

$5^2 = 3^3 - 2$, или $25 = 27 - 2$.

Доказать, что это уравнение имеет только одно решение в целых числах — трудная задача. Этот факт доказал Пьер Ферма. В гл. 2, как вы, возможно, помните, мы упоминали о том, что 26 — единственное число во всей Вселенной, заключенное между квадратом и кубом. Доказал это также Ферма. Его доказательство эквивалентно доказательству того, что приведенное выше кубическое уравнение имеет только одно решение в целых числах, т. е. 52 и 33 — единственные квадрат и куб, разность которых равна 2, т. е. 26 — единственное целое число, которое может быть заключено между квадратом и кубом.

Особое очарование кубическим уравнениям придает то, что образно говоря они занимают нишу между более простыми уравнениями, решения которых почти тривиальны, и более сложными, решить которые невозможно. Изменяя значения a, b и c в общем кубическом уравнении, можно получить бесконечное множество уравнений, каждое из которых обладает своими характерными особенностями, но все эти уравнения поддаются анализу.

Первыми изучали кубические уравнения древнегреческие математики, в том числе Диофант, который посвятил изучению их свойств большие разделы своей «Арифметики». Возможно, именно под влиянием Диофанта занялся изучением кубических уравнений Ферма, а поскольку его излюбленный герой исследовал такие уравнения, Уайлс был счастлив продолжить эти исследования. Для начинающих математиков, вроде Уайлса, кубические уравнения представляли крепкий орешек даже через две тысячи лет после Диофанта. По словам Уайлса, «они были очень далеки от полного понимания. Существует множество простых на первый взгляд вопросов относительно кубических уравнений, все еще остающихся нерешенными. Даже вопросы, которые рассматривал еще Ферма, до сих пор

остаются без ответа. В каком-то смысле вся математика, которую мне удалось разработать, восходит если не к Великой теореме Ферма, то к другим его идеям».

В качестве первого шага исследования можно не находить решения явно, а поставить вопрос: сколько решений вообще может быть? Как правило, и на этот вопрос ответить очень сложно, однако математики придумали способ как упростить эту задачу. Например, кубическое уравнение

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$

почти невозможно решить напрямую. Одно, тривиальное, решение очевидно: $x = 0$ и $y = 0$. Действительно,

$$0^3 - 0^2 = 0^2 + 0 .$$

Чуть больший интерес представляет собой решение $x = 1$ и $y = 0$:

$$1^3 - 1^2 = 0^2 + 0 .$$

Возможно, существуют и другие решения, но если принять во внимание, что перебору подлежит бесконечное множество целых чисел, то станет ясно, что составление полного списка решений этого уравнения в целых числах — задача невозможная. Более простой задачей является поиск решений в конечном числовом пространстве — так называемой арифметике вычетов[16].

Ранее мы видели, что целые числа можно мыслить как отметки на числовой прямой, простирающейся в бесконечность, как показано на рис. 16. Чтобы сделать числовое пространство конечным, арифметика вычетов отрезает от числовой прямой определенную часть и замыкает ее в петлю, образуя вместо числовой прямой числовое кольцо. На рис. 17 вы видите часы с пятью пометками: от числовой прямой отрезана часть по отметке 5, и конец ее склеен с отметкой 0. Число 5 при этом исчезает и становится эквивалентным 0, поэтому в новой арифметике — арифметике вычетов по модулю 5 — фигурируют только числа 0, 1, 2, 3, 4. 7

Рис. 16. Обычные арифметические действия можно представить как передвижения направо и налево по числовой оси

Рис. 17.

В обычной арифметике мы мыслим сложение как сдвиг по прямой на несколько делений — зазоров между отметками. Например, сказать: 2+4 = 6 — то же самое, что сказать: начните с отметки 2, сдвиньтесь вдоль числовой прямой на 4 деления и вы получите число 6. Но в арифметике вычетов по модулю 5 получаем, что

$$4 + 2 = 1 .$$

Так происходит потому, что если мы начнем с отметки 4 и сдвинемся по окружности на 2 деления, то вернемся к отметке 1. Новая арифметика может показаться непривычной, но в действительности, мы пользуемся ей ежедневно, когда речь заходит о времени. Четыре часа после 11 (т. е. 11+4) обычно принято называть не 15, а 3 часами. Это — арифметика вычетов по модулю 12.

Помимо сложения в «часовой» арифметике можно производить и все другие обычные математические операции, например, умножение. В арифметике вычетов по модулю 12 имеем: 5·7=11. Такое умножение можно представить себе следующим образом: начав с отметки 0 и сдвинувшись на 5 групп из 7 делений в каждой, вы в конце концов дойдете до

---

[16] Название арифметика вычетов, или арифметика остатков, происходит от того, что в ней рассматриваются не сами числа, а остатки от деления на какое-либо число, в данном случае на 5.

отметки 11. Это лишь один из способов мысленно представить себе умножение в этой арифметике; существуют более хитрые приемы, позволяющие ускорить вычисления. Например, чтобы вычислить 5·7, мы можем для начала просто вычислить обычное произведение, которое равно 35. Разделив затем 35 на 12, мы получим остаток, который и дает ответ на интересующий нас вопрос. Число 12 содержится в 35 дважды и плюс остаток 11, поэтому произведение 5·7 в арифметике вычетов по модулю 12 равно 11. Это равносильно тому, что мы мысленно дважды обошли циферблат, и нам осталось пройти еще 11 промежутков.

Так как в арифметике вычетов конечное число элементов, то в ней сравнительно легко найти все возможные решения любого уравнения. Например, не составляет труда перечислить все возможные решения кубического уравнения

$$x^3 — x^2 = y^2 + y$$

в арифметике вычетов по модулю 5. Вот они:

$x = 0, y = 0$,
$x = 0, y = 4$,
$x = 1, y = 0$,
$x = 1, y = 4$.

Хотя некоторые из этих решений не являются решениями в целых числах, в рассматриваемой арифметике вычетов все они — решения. Например, подставим значения ($x=1$, $y=4$) в наше уравнение:

$x^3 — x^2 = y^2 + y$,
$1^3 — 1^2 = 4^2 + 4$,
$1 — 1 = 16 + 4$,
$0 = 20$.

Но число 20 эквивалентно 0, так как число 5 делит число 20 с остатком 0.

Поскольку найти число решений кубического уравнения в целых числах крайне трудно, математики решили сначала определить число решений в различных арифметиках вычетов. Для приведенного выше уравнения число решений в арифметике по модулю 5 равно четырем. Это записывают так: $E_5 = 4$. Можно подсчитать число решений и в других арифметиках. Например, в арифметике вычетов по модулю 7 число решений равно 9, т. е. $E_7 = 9$.

Подводя итог своим вычислениям, математики составили список числа решений в каждой из арифметик вычетов и назвали его *L* -рядом эллиптической кривой (или соответствующего кубического уравнения). Что, собственно, означает здесь буква *L* , все давно забыли. Считается, что *L* означает Густава Лежена Дирихле, который также занимался изучением кубических уравнений. Для ясности я буду использовать обозначение «*E* -ряд» — ряд, полученный для кубического уравнения. Для приведенного выше уравнения *E* -ряд выглядит так.

Уравнение: $\mathbf{x^3 — x^2 = y^2 + y}$;

Е-ряд: $\mathbf{E_1 = 1, E_2 = 4, E_3 = 4, E_4 = 8, E_5 = 4, E_6 = 16, E_7 = 9, E_8 = 16, \ldots}$

Пока не известно, сколько решений имеют кубические уравнения в обычном числовом пространстве, которое бесконечно, *E* -ряды заведомо лучше, чем ничего. В действительности, *E* -ряд содержит в себе значительную долю информации о том уравнении, которое оно описывает. Подобно тому, как биологическая ДНК несет в себе всю информацию, необходимую для построения живого организма, *E* -ряд несет в себе наиболее существенную информацию об эллиптической кривой. Математики питали надежду, что *E* -ряд — это своего рода математическая ДНК, и что при помощи его они в конечном счете смогут вычислить все, что им хотелось бы знать об эллиптической кривой.

Работая под руководством Джона Коутса, Уайлс быстро заслужил репутацию блестящего специалиста по теории чисел, глубоко разбирающегося в арифметике

эллиптических кривых. С каждым новым результатом и с каждой опубликованной статьей Уайлс, сам того не ведая, набирался опыта, который несколькими годами позже привел его к возможности доказать Великую теорему Ферма.

В то время еще никому не было известно, что в послевоенной Японии уже произошла цепь событий, которые позволят установить неразрывную связь между эллиптическими кривыми и модулярными формами. Именно эта связь и приведет впоследствии к доказательству Великой теоремой Ферма. Поощряя Уайлса к изучению эллиптических кривых, Коутс дал ему средства, позволившие осуществить давнюю мечту.

Глава 5. Доказательство от противного

Узоры математика, как и узоры художника или узоры поэта, должны быть красивы; идеи, как и краски или слова, должны сочетаться гармонически. Красота является первым критерием: в мире нет места для безобразной математики.

Г. Г. Харди

В январе 1954 года талантливый молодой математик из Токийского университета нанес обычный визит в факультетскую библиотеку. Горо Шимуре был нужен экземпляр журнала «Mathematische Annalen», том 24. В частности, его интересовала статья Дойринга по алгебраической теории комплексного умножения. Шимура надеялся, что теория Дойринга поможет ему выполнить чрезвычайно сложные вычисления, смысл которых был ясен лишь узкому кругу специалистов.

К удивлению и разочарованию Шимуры, нужный ему том журнала был выдан. Его взял Ютака Танияма, с которым Шимура был едва знаком. Танияма жил в другом конце студенческого городка. Шимура отправил Танияме открытку, объясняя, что журнал ему срочно нужен, чтобы закончить сложные вычисления, и вежливо осведомился, когда тот мог бы вернуть журнал.

Через несколько дней на рабочий стол Шимуры легла открытка. Танияма сообщал, что он работает над той же проблемой и столкнулся с той же трудностью, о которой упоминал в своей открытке Шимура. Танияма предложил встретиться для того, чтобы обменяться идеями, и, возможно, в дальнейшем совместно работать над проблемой. Так случайное совпадение заказов на один и тот же журнал в университетской библиотеке стало толчком к сотрудничеству, благодаря которому в математике была найдена одна из фундаментальных закономерностей.

Танияма родился 12 ноября 1927 года в небольшом городке в нескольких километрах к северу от Токио. Японский иероглиф, обозначающий его имя, должен читаться как «Тойо», но большинство чужих людей, не являющихся членами семьи Таниямы, неправильно интерпретировали его как «Ютака», и, когда Танияма вырос, он принял это имя. В детстве образование Таниямы постоянно прерывалось. Он не отличался особенно крепким здоровьем, часто хворал, а став подростком, заболел туберкулезом и пропустил два года в средней школе. Разразившаяся война вызвала еще более продолжительный перерыв в его образовании.

Горо Шимура, бывший на один год младше Таниямы, вынужден был совсем не учиться в военные годы. Его школу закрыли, и вместо уроков Шимура был вынужден работать на заводе, собирая детали самолетов. Каждый вечер он пытался самостоятельно заниматься по школьной программе. Особенно его влекла математика. «Разумеется, приходилось изучать многие предметы, но особенно легко мне давалась математика. Я запоем читал учебники математики. По учебникам я выучил математический анализ. Если бы я захотел изучить

химию или физику, то мне потребовалось бы специальное оборудование, а у меня не было доступа ни к чему подобному. Я никогда не думал, будто обладаю какими-то способностями к математике. Просто мне было интересно».

Через несколько лет после окончания войны Шимура и Танияма были уже студентами университета. К тому времени, когда они обменялись открытками по поводу тома «Mathematische Annalen», жизнь в Токио начала возвращаться в обычное русло, и два студента могли позволить себе небольшую роскошь: среди дня немного посидеть в кафе, вечером пообедать в ресторанчике, специализировавшемся на блюдах из китового мяса, а потом погулять в ботаническом саду или городском парке. Все это были идеальные места для обсуждения самых свежих математических идей.

Хотя Шимура был не чужд некоторых причуд (он и поныне питает слабость к анекдотам о мудрецах, проповедующих дзен-буддизм), он был более консервативен и традиционен, чем его коллега. Шимура поднимался на рассвете и сразу же приступал к работе. Танияма же частенько не ложился спать, проработав всю ночь напролет. Те, кто заглядывал днем к нему в номер, нередко заставали его спящим.

Шимура был скрупулезен и строг, Танияма небрежен, почти ленив. Удивительно, но именно эта черта в Танияме особенно импонировала Шимуре: «Он обладал особым даром совершать множество ошибок, в основном в правильном направлении. Я завидовал этой его особенности и даже пытался подражать ему, но обнаружил, что совершать хорошие ошибки очень трудно».

Танияма был живым воплощением рассеянного гения, и это отражалось и на его внешности. Он был неспособен крепко завязать шнурки на ботинках и поэтому решил вместо того, чтобы по десять раз на день делать одно и тоже, вообще их не завязывать. Он всегда носил один и тот же весьма приметный зеленый костюм с металлическим отливом. Костюм был сшит из ткани, настолько кричащей, что остальные члены семьи отказались от нее.

Когда Танияма и Шимура встретились в 1954 году, они оба были начинающими математиками. По традиции, существующей и до сих пор, молодых аспирантов берет «под крыло» профессор, руководящий их становлением как математиков. Танияма и Шимура отвергли такую форму ученичества. Во время войны настоящие математические исследования прекратились, и даже к 50-м годам математический факультет еще не возродился. По словам Шимуры, профессора были «усталы, измучены и разочарованы». Что же касается послевоенных студентов и аспирантов, то они были преисполнены энергии и страстно хотели учиться. Вскоре аспиранты поняли, что единственный доступный им способ изучать математику заключается в том, чтобы обучать друг друга. Они организовали регулярно действующие семинары, на которых по очереди информировали друг друга о новейших идеях, результатах и методах. Несмотря на свою вялость и апатичность, Танияма, когда речь заходила о семинарах, преисполнялся всесокрушающей энергией. Аспирантов постарше он поощрял к тому, чтобы те смелее вторгались на еще неизведанную территорию, а по отношению к аспирантам младше себя и студентам выступал в роли учителя. Научная изоляция Японии привела к тому, что эти семинары занимались задачами, которые, как правило, в Европе и Америке считалась давно пройденными. Одна вышедшая из моды тема, а именно, исследование модулярных форм, казалась особенно привлекательной Танияме и Шимуре, Модулярные формы — один из самых причудливых и чудесных объектов в математике. Современный специалист по теории чисел Эйхлер причислил их к одной из пяти фундаментальных операций, т. е. умение обращаться с модулярными формами он считал настолько же важным, как и выполнение четырех действий арифметики. Надо сказать, что далеко не все математики уверенно чувствуют себя, сталкиваясь с этой пятой операцией, в отличие от первых четырех, где они считают себя мастерами.

Отличительной особенностью модулярных форм является их необычайно высокий уровень симметрии. Хотя большинство людей знакомо с повседневным понятием

симметрии, в математике в термин «симметрия» вкладывают особый смысл. Объект считается обладающим симметрией, если его можно преобразовать дозволенным образом так, что преобразованный объект будет неотличим от исходного. Чтобы оценить необычайно высокую симметрию модулярной формы полезно сначала изучить симметрию какого-нибудь более знакомого объекта, например, простого квадрата.

Рис. 18. Простой квадрат обладает вращательной и зеркальной симметриями

Рис. 19. Плоскость, выложенная квадратами, помимо вращательной и зеркальной симметрий обладает еще и трансляционной симметрией

В случае квадрата одна из форм симметрий — вращательная. Если мы мысленно проведем через точку пересечения осей x и y прямую, перпендикулярную рисунку, то квадрат на рис. 18 можно повернуть на четверть оборота — и он будет неотличим от исходного квадрата. Квадрат будет неотличим от исходного и после поворота на пол-оборота, три четверти оборота и полный оборот.

Помимо вращательной симметрии квадрат обладает зеркальной симметрией. Если представить себе, что зеркало расположено вдоль оси x перпендикулярно плоскости рисунка, то верхняя половина квадрата отразится точно на нижнюю и наоборот, поэтому после преобразования квадрат будет неотличим от исходного. Аналогично, мы можем поставить три других зеркала (вдоль оси y и двух диагоналей). Во всех случаях отраженный квадрат будет неотличим от исходного квадрата.

Простой квадрат симметричен, поскольку обладает вращательной и зеркальной симметриями. Но не обладает трансляционной симметрией. Это означает, что если квадрат подвергнуть сдвигу в любом направлении, то наблюдатель тотчас же заметит перемещение, поскольку положение квадрата относительно осей x и y изменится. Но если бы вся плоскость была вымощена квадратами, как на рис. 19, то этот бесконечный набор квадратов обладал бы трансляционной симметрией. При сдвиге такой разбитой на квадраты бесконечной поверхности на расстояние, равное одной или нескольким длинам квадрата, сдвинутая мозаика была бы ничем не отличима от исходной.

Симметрия выложенных плитками поверхностей — идея довольно простая, но, как это нередко бывает со многими простыми на первый взгляд понятиями, в ней скрыто немало тонкостей. Например, в 70-е годы британский физик и большой любитель занимательных задач-головоломок Роджер Пенроуз начал прикидывать различные варианты разбиения одной и той же поверхности на плитки различной формы. В конце концов он обнаружил две особенно интересные формы, которые он назвал воздушным змеем и дротиком (см. рис. 20). Каждая из этих форм сама по себе не годится для замощения всей поверхности без пробелов и наложений плиток друг на друга, но вместе воздушные змеи и дротики позволяют разбивать поверхность на мозаики с различным рисунком. Змеи и дротики можно сочетать бесконечным числом способов, и хотя рисунки мозаик кажутся похожими, они сильно отличаются в деталях. Одна из таких мозаик представлена на рис. 20.

Рис. 20. Используя плитки двух различных форм Роджер Пенроуз сумел выложить ими всю плоскость. Однако мозаика Пенроуза не обладает трансляционной симметрией

Еще одна замечательная особенность мозаик Пенроуза заключается в том, что они обладает весьма ограниченным уровнем симметрии. На первый взгляд может показаться, что мозаика на рис. 20 обладает трансляционной симметрией, тем не менее любая попытка совместить мозаику с самой собой завершается неудачей. Мозаики Пенроуза оказались асимметричными, и этим они так привлекли математиков, что стали исходным пунктом в развитии целого нового направления.

Интересно отметить, что мозаики Пенроуза эхом отозвались в материаловедении. Кристаллографы всегда считали, что структура кристаллов опирается на принципы, лежащие в основе разбиения на квадраты, обладающего высоким уровнем трансляционной симметрии. Теоретически строение кристаллов зиждется на весьма регулярной периодической структуре. Но в 1984 году ученые обнаружили металлический кристалл сплава алюминия и марганца, построенный на тех же принципах, что и мозаики Пенроуза. Мозаика сплава алюминия и марганца вела себя, как мозаика из воздушных змеев и дротиков, порождая кристалл почти регулярный, но не совсем. Недавно одна из французских компаний использовала кристалл Пенроуза в покрытии для сковород.

Если отличительной особенностью мозаик Пенроуза является их ограниченная симметрия, то отличительная особенность модулярных форм — их бесконечная, неисчерпаемая симметрия. Модулярные формы, изучением которых занимались Танияма и Шимура, можно подвергать трансляциям (параллельным переносам, или сдвигам), перестраивать, переставлять фрагменты, отражать в зеркалах и поворачивать бесконечно многими способами, и при этом они останутся неизменными, что делает их наиболее симметричными математическими объектами. Когда французский математик-универсал Анри Пуанкаре изучал модулярные формы в XIX веке, он испытал огромные трудности, пытаясь справиться с их огромной симметрией. Пуанкаре признавался своим коллегам, что получив модулярную форму частного вида, он на протяжении двух недель просыпался каждое утро в надежде найти ошибку в своих вычислениях. И только на пятнадцатый день он понял, что модулярные формы действительно обладают предельно возможной симметрией.

К сожалению, ни нарисовать, ни даже наглядно представить себе модулярную форму невозможно. В случае квадратной мозаики мы имеем объект, который обитает в двух измерениях. Его пространство задано осью x и осью y. Модулярную форму можно представлять себе как функцию, область определения которой находится в двух измерениях, но область значений которой также двумерна. Поэтому если бы мы хотели посмотреть на график такой функции, то он оказался бы в четырехмерном пространстве.

Еще одной особенностью модулярных форм является то, что на области их определения можно ввести специальную структуру, превращающую эту область в гиперболическое пространство. Людям, вынужденным жить в обычном трехмерном мире, понять, что такое гиперболический мир, довольно трудно, но с точки зрения математики именно эта особенность придает модулярным формам столь необычайно высокий уровень симметрии. Голландский художник Мориц Эшер был так увлечен математическими идеями, что попытался воплотить понятие гиперболического пространства в некоторых из своих гравюр и рисунков. На рис. 21 вы видите работу Эшера «Предельный круг. IV», на которой гиперболический мир втиснут в двумерную страницу. В истинно гиперболическом мире все летучие мыши и ангелы были бы одного размера, а повторы указывают на высокий уровень симметрии. Хотя некоторая симметрия ощутима и на рисунке, по мере продвижения к краю картины искажения усиливаются.

Рис. 21. «Предельный круг. IV» Морица Эшера содержит некоторые элементы симметрии модулярных форм

Модулярные формы появляются в различных обличьях, но каждую из форм можно представить в виде бесконечной суммы слагаемых специального вида, которые и отличают одну форму от другой. Эти бесконечные ряды, с помощью которых модулярная форма задается однозначно, называют модулярными рядами, или M -рядами.

Подобно тому, как E -ряды служат своего рода ДНК для эллиптических кривых, M -ряды играют роль ДНК для модулярных форм. Изменяя слагаемые M -ряда можно породить совершенно другую, но столь же симметричную, модулярную форму или полностью

разрушить симметрию и создать новый объект, который не является модулярной формой. Если слагаемые выбраны произвольно, то построенный объект скорее всего будет обладать малой симметрией или даже будет полностью асимметричным.

Модулярные формы сами по себе играют весьма важную роль в математике. Они никак не связаны с предметом исследований Уайлса в Кембридже — эллиптическими кривыми. Модулярная форма — объект необычайно сложный, открытый только в XIX веке и ставший предметом пристального изучения главным образом из-за его симметрии. Кубические уравнения, соответствующие эллиптическим кривым, были известны с античных времен и не были никак связаны с симметрией. Модулярные формы и эллиптические кривые обитают в совершенно различных областях математического мира, и никому и в голову не приходило, что между ними существует какая-нибудь связь. Поэтому Танияма и Шимура повергли математическое сообщество в состояние шока своей гипотезой о том, что эллиптические кривые и модулярные формы по существу представляют собой одно и то же.

Желаемое принимается за действительное

В сентябре 1955 года в Токио состоялся международный симпозиум. Для молодых японских математиков это была уникальная возможность продемонстрировать остальному миру свои результаты. Они распространили среди участников симпозиума подборку из тридцати шести задач, связанных с той проблемой, над которой они работали, предпослав задачам следующее скромное введение: «Некоторые нерешенные математические задачи. Никакого основательного предварительного исследования не проводилось. Некоторые из предлагаемых задач могут быть тривиальными или уже решенными. Обращаемся к участникам семинара с просьбой прокомментировать любые из них».

Четыре задачи были предложены Таниямой и указывали на любопытную связь между модулярными формами и эллиптическими уравнениями. Эти невинные задачи в конце концов привели к перевороту в теории чисел. Танияма смог вычислить несколько первых членов M -ряда некоторой модулярной формы и понял, что эти члены совпадают с членами E -ряда хорошо известной эллиптической кривой. Танияма вычислил еще несколько членов каждого ряда, и M -ряд модулярной формы и E -ряд эллиптической кривой полностью совпали.

Ютака Танияма (крайний слева) и Горо Шимура (крайний справа) на Международном симпозиуме в Токио (1955)

Это открытие было поразительным, потому что не было никакой видимой причины, по которой модулярную форму можно было связать с эллиптической кривой. Однако, математические ДНК (E- и M -ряды), составляющие самую сущность обоих математических объектов, оказались тождественными. Открытие Таниямы было глубоким по двум причинам. Во-первых, оно наводило на мысль о существовании фундаментальной взаимосвязи между модулярными формами и эллиптическими кривыми — разными объектами математического мира. Во-вторых, оно означало, что математикам, которые уже знали M -ряд модулярной формы, нет необходимости вычислять E -ряд для соответствующей эллиптической кривой, поскольку он в точности совпадает с M -рядом.

Установление взаимосвязи между, казалось бы, различными объектами чрезвычайно плодотворно не только в математике, но и в любой науке. Такая взаимосвязь указывает на какой-то глубокий принцип, лежащий в основе обоих объектов и позволяющий глубже понять их. Например, первоначально физики рассматривали электричество и магнетизм как совершенно не связанные между собой явления, а в XIX веке теоретики и экспериментаторы поняли, что электричество и магнетизм тесно связаны между собой. В результате было достигнуто более глубокое понимание и электричества, и магнетизма. Электрические токи

порождают магнитные поля, а магниты могут индуцировать электричество в проводниках, находящихся вблизи магнитов. Это привело к изобретению динамомашин и электромоторов. В конце концов было открыто, что свет представляет собой результат согласованных гармонических колебаний магнитного и электрического полей.

Танияма исследовал несколько других модулярных форм, и в каждом случае M -ряд в точности совпадал с E -рядом эллиптической кривой. Танияма начал размышлять над тем, не может ли каждая модулярная форма находиться в соответствии с некоторым кубическим уравнением. Может быть, у каждой модулярной формы есть такая же ДНК, как у некоторой эллиптической кривой? Именно с этой гипотезой и были связаны задачи, которые Танияма предложил вниманию участников симпозиума.

Идея о том, что каждая эллиптическая кривая связана с какой-то модулярной формой, была настолько необычна, что те, кому довелось взглянуть на задачи Таниямы, считали их не более чем забавным наблюдением. Разумеется, Танияма продемонстрировал, что несколько эллиптических кривых можно поставить в соответствие определенным модулярным формам, но участники семинара сочли, что это не более чем совпадение. По их мнению, гипотеза Таниямы о существовании какой-то более общей и универсальной взаимосвязи не имела под собой достаточного основания. Она опиралась не столько на факты, сколько на интуицию.

Единственным союзником Таниямы был Шимура, твердо веривший в силу и глубину идей своего друга. После симпозиума он стал работать вместе с Таниямой, стремясь довести его гипотезу до такого уровня, на котором остальной мир уже не сможет игнорировать полученные ими результаты. Шимура хотел найти новые факты, подтверждающие существование взаимосвязи между модулярными формами и эллиптическими кривыми. Их сотрудничество временно приостановилось в 1957 году, когда Шимура был приглашен в Принстонский институт высших исследований. По истечении двух лет работы в Америке в качестве приглашенного профессора Шимура намеревался возобновить совместную работу с Таниямой, но этим планам не суждено было сбыться. 17 ноября 1958 года Ютака Танияма покончил жизнь самоубийством.

Смерть гения

Шимура все еще хранит ту открытку, которую Танияма послал ему в ответ на просьбу вернуть том журнала «Mathematische Annalen». Он также хранит письмо, которое Танияма прислал ему, когда он находился в Принстоне. В письме не было ни малейшего намека на то, что произошло всего лишь двумя месяцами позднее. До сего дня Шимура не может понять, что толкнуло Танияму на самоубийство. «Я был очень озадачен. Озадачен — наиболее точное слово. Разумеется, я был очень опечален. Все это было так неожиданно. Я получил от него письмо в сентябре, а погиб он в начале ноября. В голове у меня это просто не укладывается. Разумеется, позднее до меня доходили разные слухи, и я пытался как-то примириться с его смертью. Некоторые говорили, что он потерял уверенность в себе, но не как математик».

У Горо Шимуры и поныне хранится последнее письмо, которое он получил от своего друга и коллеги Ютаки Таниямы

Друзья Таниямы недоумевали, так как он незадолго до самоубийства полюбил Мисако Сузуки и намеревался в том году вступить с ней в брак. В некрологе, опубликованном в журнале «Bulletin of the London Mathematical Society», Горо Шимура вспоминает помолвку Таниямы и Мисако и последние недели жизни своего друга:

> «Получив известие об их помолвке, я был несколько удивлен, так как смутно ощущал, что она была не в его вкусе, но никаких дурных предчувствий у меня не

было. Позднее мне рассказали, что они сняли квартиру, по-видимому, более комфортабельную, вместе купили кое-какую кухонную утварь и занялись приготовлениями к свадьбе. Будущее казалось безоблачным и им, и их друзьям. Катастрофа обрушилась внезапно.

Утром в понедельник 17 ноября 1958 года комендант аспирантского общежития, где жил Танияма, обнаружил его мертвым. На столе лежало предсмертное письмо. Оно заняло три страницы из блокнота, в котором он обычно производил вычисления. Первый абзац письма гласил: "Вплоть до вчерашнего дня у меня не было определенного намерения покончить с собой. Но многие обратили внимание на то, что последнее время я очень устал и физически, и умственно. Что касается причины самоубийства, то она не вполне понятна мне самому, но во всяком случае не является результатом чего-нибудь конкретного. Могу только сказать, что нахожусь в таком умонастроении, что утратил всякую уверенность в моем будущем. Возможно, кого-нибудь мое самоубийство встревожит или до какой-то степени огорчит. Я искренне надеюсь, что этот случай не омрачит будущее этого человека. Во всяком случае, я не могу отрицать того, что мой поступок отдает предательством, но прошу отнестись к нему снисходительно, как к последнему поступку, который я совершаю по своей воле. Всю свою жизнь я делал то, что хотел."

Далее Танияма очень скрупулезно описывает, как следует распорядиться его имуществом, какие книги и пластинки он брал в библиотеке или у друзей. В частности, в его посмертном письме говорится: "Я хотел бы оставить пластинки и проигрыватель Мисако Сузуки, если ей не будет неприятно получить их от меня". Затем он поясняет, на чем остановился, читая курсы математического анализа и линейной алгебры для студентов, и приносит своим коллегам извинения за те неудобства, которые причинит им его поступок. Это был один из самых блестящих и новаторских умов своего времени, ушедший из жизни по собственному желанию. Всего лишь за пять дней до самоубийства ему исполнился тридцать один год».

Через несколько недель после самоубийства Таниямы трагедия повторилась: его невеста Мисако Сузуки также покончила с собой. В ее посмертном письме говорилось: "Мы обещали друг другу, что куда бы мы ни отправились, мы никогда не будем разлучаться. Теперь он ушел. Я должна также уйти, чтобы быть вместе с ним".

Что значит «хорошо» в математике

За свою короткую жизнь в математике Танияма внес немало радикальных идей. Наиболее значительная из них настолько опередила свое время, что ему так и не довелось увидеть, какое огромное влияние она оказала на теорию чисел. Он был лидером среди молодых японских математиков, и его уход из жизни стал для них большой потерей. Шимура отчетливо вспоминает влияние Таниямы: «Он всегда был внимателен к коллегам, особенно к молодым, и искренне заботился об их благосостоянии. Для многих из тех, кто вступал с ним в математический контакт, в том числе и для меня, он служил моральной опорой. Возможно, он не догадывался о той роли, которую играл. Ныне я ощущаю его благородную щедрость в этом отношении еще более остро, чем когда он был жив. Но никто не смог поддержать его, когда он отчаянно нуждался в поддержке. Когда я думаю об этом, глубочайшая печаль переполняет меня».

После смерти Таниямы Шимура сосредоточил все свои усилия на том, чтобы понять, какая именно взаимосвязь существует между эллиптическими кривыми и модулярными формами. Несколько лет он упорно собирал все новые и новые факты и логические доводы в пользу гипотезы Таниямы. Постепенно он стал проникаться все большей уверенностью в том, что каждое эллиптическое уравнение в отдельности должно быть связано с соответствующей модулярной формой. Другие математики сомневались, и Шимура вспоминает разговор с одним знаменитым коллегой. Профессор спросил: «Я слышал, что Вы предполагаете, будто какие-то эллиптические кривые могут быть связаны с модулярными

формами?» «Вы не поняли, — возразил Шимура. — Не просто какие-то эллиптические кривые, а каждая эллиптическая кривая!»

Шимура не мог доказать, что это действительно так, но всякий раз, когда он проверял гипотезу, она неизменно оказывалась верной. Во всяком случае, все происходившее как нельзя лучше вписывалась в его широкую философию математики. «У меня есть своя философия относительно того, что такое хорошо. Математика должна выражать то, что хорошо. Например, в случае эллиптической кривой, ее можно назвать хорошей, если она параметризована модулярной формой. По моим ожиданиям, все эллиптические кривые хорошие. Разумеется, это философия в чистом виде, но ничто не мешает ее принять за исходный пункт. Нужно ли говорить, что в обоснование гипотезы мне приходится изыскивать различные «технические» причины. Я бы сказал, что моя математическая гипотеза появилась из моего представления о том, что такое хорошо. Многие математики занимаются своей наукой из эстетических соображений, и моя философия того, что такое хорошо, также проистекает из моих эстетических соображений».

Собранные Шимурой подкрепляющие данные означали, что гипотеза о связи между эллиптическими кривыми и модулярными формами начала пользоваться более широким признанием. Шимура не мог доказать, что гипотеза верна, но, по крайней мере, никто более не мог утверждать, что, формулируя гипотезу, он выдает желаемое за действительное. В пользу нее теперь свидетельствовало довольно много фактов. Первоначально ее стали называть гипотезой Таниямы-Шимуры в знак признания заслуг человека, впервые высказавшего ее, и его коллеги, который развил ее и придал ей законченный вид.

Андре Вейль, один из крестных отцов теории чисел XX века, принял эту гипотезу и опубликовал ее на Западе. Вейль подверг идею Шимуры и Таниямы подробнейшему анализу и обнаружил еще более фундаментальные данные, свидетельствующие в ее пользу. В результате эту гипотезу стали часто называть гипотезой Таниямы-Шимуры—Вейля, иногда — гипотезой Таниямы—Вейля, а иногда даже гипотезой Вейля. Относительно того, как ее следует правильно называть, было немало дискуссий и споров. Для тех читателей, которые интересуются подобной комбинаторикой, заметим, что все возможные комбинации из трех имен — Таниямы, Шимуры и Вейля — появлялись в печати в течение года, однако я буду ее называть так, как ее назвали в самом начале, — гипотезой Таниямы-Шимуры.

Профессор Джон Коутс, руководитель Эндрю Уайлса в его аспирантские годы, сам был аспирантом в то время, когда гипотезу Таниямы-Шимуры начали обсуждать на Западе. «Я приступил к самостоятельным исследованиям в 1966 году, когда гипотеза Таниямы-Шимуры распространялась по всему миру. Все были потрясены и начали серьезно задумываться над вопросом, все ли эллиптические кривые могут быть модулярными. Время было захватывающе интересным; единственная проблема заключалась в том, что успехи были очень незначительны. Должен честно признаться, что сколь ни красивой была сама идея, доказать ее было очень трудно, и именно это привлекало нас как математиков».

В конце 60-х многие математики только и делали, что занимались проверкой гипотезы Таниямы-Шимуры. Они брали какую-нибудь эллиптическую кривую, вычисляли E -ряд и занимались поиском модулярной формы с таким же M -рядом. И каждый раз находили для данной эллиптической кривой соответствующую ей модулярную форму. И хотя это убедительно свидетельствует в пользу гипотезы Таниямы-Шимуры, доказательством собранные данные считать было нельзя. Математики подозревали, что гипотеза верна, но до тех пор, пока не найдено логическое доказательство, гипотеза оставалась всего лишь гипотезой.

Профессор Гарвардского университета Барри Мазур был свидетелем того, как гипотеза Таниямы-Шимуры обретала все большую известность. «Гипотеза была великолепной (предполагалось, что каждой эллиптической кривой соответствует модулярная форма), поначалу ее игнорировали, так как она опередила свое время. Когда она была выдвинута впервые, ее не восприняли всерьез потому, что она была чересчур удивительна. С одной стороны, вы имеете эллиптический мир, с другой — модулярный мир. Обе эти области

математики исследовались интенсивно, но независимо друг от друга. Математики, занимавшиеся изучением эллиптических кривых, могли не быть сведущими в проблемах модулярных форм, и наоборот. И тут появляется гипотеза Таниямы-Шимуры, которая утверждает, что между двумя совершенно различными математическими мирами существует мост. Математики любят наводить мосты».

Значение математических мостов огромно. Они позволяют сообществам математиков, обитающим на отдельных островах, обмениваться идеями и исследовать то, что удалось создать их коллегам с других островов. Математика состоит из островов знания в море незнания. Например, на одном острове обитают геометры, занимающиеся изучением форм, на другом острове теории вероятностей математики изучают риски и случайность. Существуют десятки других островов, обитатели которых говорят на своем собственном языке, непонятном обитателям других островов. Язык геометрии сильно отличается от языка теории вероятностей, а алгебраическая терминология чужда тем, кто говорит только о статистике.

Большой интерес к гипотезе Таниямы-Шимуры был обусловлен тем, что она наводила мост между двумя островами и позволяла их обитателям впервые говорить друг с другом. Барри Мазур склонен видеть в гипотезе Таниямы-Шимуры устройство, позволяющее осуществлять перевод с одного языка на другой, аналогичное розеттскому камню, надписи на котором были выполнены на трех языках: демотическим египетским письмом, на древнегреческом языке и египетскими иероглифами. Так как демотическое письмо и древнегреческий были понятны, археологи впервые смогли расшифровать египетские иероглифы. «Если один из языков вы знаете, то розеттский камень позволяет вам достичь глубокого понимания другого языка, — говорит Мазур. — Но гипотеза Таниямы-Шимуры — розеттский камень, наделенный определенной магической силой. Гипотеза Таниямы-Шимуры обладает весьма приятной особенностью, которая заключается в том, что простые интуитивные соображения в модулярном мире при переводе превращаются в глубокие истины в эллиптическом мире, и наоборот. Более того, глубокие проблемы в эллиптическом мире иногда решались очень просто при переводе их с помощью нового "розеттского камня" на язык модулярного мира, если удавалось обнаружить в модулярном мире идеи и средства для решения переведенной проблемы. Оставаясь в эллиптическом мире, мы были бы обречены на поражение».

Если бы гипотеза Таниямы-Шимуры оказалась верной, то она позволила бы математикам подходить к решению эллиптических проблем, остававшихся нерешенными на протяжении столетий, с позиций модулярного мира. Была надежда, что область эллиптических уравнений удастся объединить с областью модулярных форм. Гипотеза Таниямы-Шимуры также породила надежду на существование мостов и между другими областями математики. В 60-е годы возможности, заложенные в гипотезе Таниямы-Шимуры, поразили воображение Роберта Ленглендса из Принстонского Института высших исследований. И хотя гипотеза не была доказана, Ленглендс был убежден, что она представляет собой всего лишь один из элементов гораздо более общей схемы унификации. Он считал, что все основные разделами математики взаимосвязаны, и приступил к поиску такого рода связей. Через несколько лет его поиски стали приносить первые результаты. Другие гипотезы о связях между разными разделами математики были гораздо слабее и рискованнее, чем гипотеза Таниямы-Шимуры, но все они сплетались в одну тонкую сеть. Ленглендс мечтал о том, как одна за другой эти гипотезы будут доказаны и возникнет великая единая математика.

Ленглендс охотно обсуждал свой план построения математики будущего (который впоследствии стали называть программой Ленглендса) и пытался привлечь других математиков к участию в доказательстве множества своих гипотез. Никаких путей, ведущих к цели не было видно, но если бы мечта Ленглендса все же осуществилась, то награда была бы грандиозной. Любую неразрешимую проблему в одной области математики можно было бы трансформировать в аналогичную проблему из другой области, где для ее решения

имелся бы целый новый арсенал методов.[17] В случае неудачи эту проблему можно было бы перенести еще в какую-нибудь другую область математики, и так далее — до тех пор, пока наконец она не будет решена. В один прекрасный день, как надеялся автор программы Ленглендс, математики смогут решить самые трудные и тонкие проблемы, перенеся их в более подходящее место математического ландшафта.

Важные следствия программа Ленглендса могла бы иметь и для прикладных наук и техники. Идет ли речь о моделировании взаимодействий между сталкивающимися кварками, или о выяснении наиболее эффективного варианта организации телекоммуникационной сети, часто ключом к решению проблемы служит выполнение математических расчетов. В некоторых разделах физики и техники сложность вычислений столь высока, что служит серьезнейшим препятствием на пути к прогрессу. Если бы математики могли доказать «мостообразующие» гипотезы из программы Ленглендса, то появились бы пути решения не только абстрактных, но и практических проблем реального мира.

К 70-м годам программа Ленглендса стала своего рода перспективным планом развития математики, но «путь в рай», о котором может только мечтать каждый любитель решать задачи, был закрыт весьма простым обстоятельством: никто не имел ни малейшего представления о том, как можно было бы доказать любую из гипотез Ленглендса. Первым шагом к осуществлению программы Ленглендса могло бы стать доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры, но и оно пока было неосуществимо.

Несмотря на это, гипотеза Таниямы-Шимуры упоминалась в сотнях математических статей, авторы которых рассуждали о том, что произошло бы, если бы ее удалось доказать. Такие статьи начинались с преамбулы: «Предположим, что гипотеза Таниямы-Шимуры верна…» Далее следовал набросок решения какой-нибудь нерешенной задачи. Разумеется, полученные в таких работах результаты были не более чем гипотетическими. В свою очередь, эти результаты включались как предположения в другие результаты, и т. д. Возникла обширная математическая «страна», опиравшаяся только на истинность гипотезы Таниямы-Шимуры. Именно эта гипотеза стала фундаментом целого нового здания в математике, но до тех пор, пока гипотеза Таниямы-Шимуры не была доказана, все здание могло рухнуть в любой момент.

В то время Эндрю Уайлс был молодым аспирантом Кембриджского университета, и он отчетливо вспоминает тревогу, которая охватила математическое сообщество в 70-е годы: «Мы строили все новые и новые гипотезы, простиравшиеся все дальше и дальше в будущее, но все это обратилось бы в прах, окажись гипотеза Таниямы-Шимуры неверна. Нам было необходимо доказать ее, чтобы продемонстрировать обоснованность плана, который мы с таким энтузиазмом наметили на будущее».

Математики сложили хрупкий карточный домик. Они мечтали о том, что в один прекрасный день удастся подвести под это сооружение надежный фундамент. Их неотвязно мучил кошмар: кто-нибудь мог доказать, что гипотеза Таниямы-Шимуры неверна, и тем самым свести на нет плоды математических исследований на протяжении двух десятков лет.

Недостающее звено

Осенью 1984 года избранная группа специалистов по теории чисел собралась на симпозиум в Обервольфахе, небольшом городке в Германии, в Шварцвальде. Участники симпозиума намеревались обсудить успехи в изучении эллиптических кривых. Естественно, что некоторые из докладчиков собирались сделать сообщения о продвижениях, которые им удалось достичь при исследовании гипотезы Таниямы-Шимуры. Один из выступавших, математик из Саарбрюкена Герхард Фрей высказал весьма примечательное утверждение. По

[17] Строго говоря программа Ленглендса относится прежде всего к установлению связей между теорией представлений алгебраических групп, теорией модулярных форм и теорией Галуа глобальных полей.

его мнению, если бы кому-нибудь удалось доказать гипотезу Таниямы-Шимуры, то тем самым была бы доказана и Великая теорема Ферма.

Когда Фрею предоставили слово для доклада, он начал с того, что выписал уравнение Ферма

$x^n + y^n = z^n$, где n — натуральное число больше 2.

Великая теорема Ферма утверждает, что это уравнение не имеет решений в целых числах. Фрей исследовал вопрос о том, что бы произошло, если бы Великая теорема Ферма оказалась неверной, т. е. если бы уравнение Ферма допускало бы по крайней мере одно решение в целых числах. Фрей не имел ни малейшего представления о том, каким могло бы быть его гипотетическое (и еретическое) решение, поэтому неизвестные целые числа, якобы удовлетворяющие уравнению Ферма, он обозначил буквами A, B и C. Тем самым он предположил, что для некоторого N выполнено равенство:

$A^N + B^N = C^N$.

Затем Фрей приступил к «преобразованию» уравнения. Это строгая математическая процедура, изменяющая вид уравнения, оставляя неизменной его сущность. С помощью искусных и сложных маневров Фрею удалось преобразовать исходное уравнение Ферма, обладающее гипотетическим решением, к виду

$y^2 = x^3 + (A^N — B^N)\cdot x^2 — A^N B^N$.

Хотя полученное уравнение по своему внешнему виду очень сильно отличается от исходного, тем не менее оно является его прямым следствием с учетом принятой гипотезы. Иначе говоря, если (и, разумеется, это большое «если») уравнение Ферма допускает решение в целых числах, то такое преобразованное уравнение существует. Поначалу преобразование Фрея не произвело особого впечатления на аудиторию, но он обратил внимание присутствующих на то, что это уравнение кубическое, а кривая, ему соответствующая, является эллиптической.

Преобразовав уравнение Ферма в кубическое, Фрей тем самым установил связь между Великой теоремой Ферма и гипотезой Таниямы-Шимуры. Далее Фрей обратил внимание аудитории на то, что его эллиптическая кривая, полученная при помощи решения уравнения Ферма, обладает весьма причудливым характером. Фрей утверждал, что эта эллиптическая кривая настолько необычна, что даже отзвуки самого существования этой кривой имеют разрушительные последствия для гипотезы Таниямы-Шимуры.

Не следует забывать, что эллиптическая кривая Фрея — всего лишь фантом, призрак. Ее существование обусловлено тем, что уравнение Ферма имеет решение. Но если эллиптическая кривая Фрея существует, то она столь причудлива и необычайна, что невозможно установить соответствие между ней и какой угодно модулярной формой. Но гипотеза Таниямы-Шимуры утверждает, что каждая эллиптическая кривая должна быть связана с какой-нибудь модулярной формой. Таким образом, существование эллиптической кривой Фрея отрицает гипотезу Таниямы-Шимуры. Иначе говоря, аргументы Фрея сводились к следующему.

1. В том (и только в том) случае, если Великая теорема Ферма неверна, то эллиптическая кривая Фрея существует.

2. Кривая Фрея настолько причудлива, что не может быть модулярной.

3. Гипотеза Таниямы-Шимуры утверждает, что любая эллиптическая кривая должна быть модулярной.

4. Следовательно, гипотеза Таниямы-Шимуры должна быть неверна!

Но, что еще более важно, рассуждения Фрея можно обратить:

1. Если гипотеза Таниямы-Шимуры окажется верной, то каждая эллиптическая кривая должна быть модулярной.

2. Если любая эллиптическая кривая должна быть модулярной, то эллиптическая кривая Фрея не может существовать.

3. Если эллиптическая кривая Фрея не существует, то не могут существовать решения уравнения Ферма.

4. Следовательно, Великая теорема Ферма верна!

Отсюда Герхард Фрей сделал сенсационный вывод о том, что если бы математикам удалось доказать гипотезу Таниямы-Шимуры, то они автоматически доказали бы Великую теорему Ферма. Впервые за сотни лет появилась надежда, что труднейшую математическую проблему все же удастся разрешить. По Фрею, на пути к доказательству Великой теоремы Ферма стоит единственное препятствие: отсутствие доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры.

На аудиторию блестящая идея Фрея произвела неизгладимое впечатление, но присутствовавших поразил элементарный пробел в его логике. Почти все, кто был в аудитории, кроме самого Фрея, заметили этот пробел. Ошибка не казалась серьезной, тем не менее пока она не была исправлена, работу Фрея нельзя было считать законченной. Тому, кто сумел бы первым исправить эту ошибку, принадлежала бы честь установления связи между Великой теоремой Ферма и гипотезой Таниямы-Шимуры.

Слушатели Фрея вышли из аудитории и устремились в комнату фотокопирования. Очень часто о важности доклада можно судить по длине очереди ожидающих у этой комнаты оттисков с текстом доклада. Получив полный текст доклада Фрея, слушатели разъехались по своим институтам и начали пытаться восполнить пробел в его рассуждениях.

Аргументы Фрея опирались на то, что его эллиптическая кривая, выведенная из уравнения Ферма, весьма причудлива — и поэтому не модулярна. Работа Фрея была неполна потому, что Фрей не доказал, что его эллиптическая кривая достаточно причудлива. Только когда кому-нибудь удастся доказать, что абсолютная причудливость эллиптической кривой Фрея доказывает гипотезу Таниямы-Шимуры, из этого будет следовать доказательство Великой теоремы Ферма.

Первоначально математики считали, что доказательство причудливости эллиптической кривой Фрея не требует никаких новых идей. Казалось, что допущенная Фреем ошибка элементарна, и все, кто присутствовал на симпозиуме в Обервольфахе, полагали, что начнется гонка — кто быстрее проделает необходимые выкладки. Все ожидали, что через несколько дней кто-нибудь пришлет по электронной почте сообщение о том, как именно доказать причудливость эллиптической кривой.

Прошла неделя. Никакого сообщения по электронной почте не последовало. Прошло несколько месяцев. То, что должно было стать массовым математическим забегом на спринтерскую дистанцию стало медленно, но верно превращаться в марафон. Казалось, Ферма продолжает по-прежнему дразнить и мучить своих потомков. Фрей нарисовал увлекательную, но обманчивую стратегию доказательства Великой теоремы Ферма, но даже первый шаг — доказательство немодулярности эллиптической кривой Фрея — озадачил математиков всего земного шара.

Чтобы доказать, что эллиптическая кривая не модулярна, математики занялись поиском инвариантов, аналогичных тем, которые были описаны в гл. 4. Инвариант узла показывает, что один инвариант не может быть трансформирован в другой, инвариант придуманной модели Лойдом головоломки «15–14» показывает, что исходное расположение шашек в этой головоломке невозможно превратить в расположение шашек строго по порядку номеров. Если бы специалистам по теории чисел удалось найти подходящий инвариант для описания эллиптической кривой Фрея, то они смогли бы доказать, что этой кривой, что бы с ней ни делали, невозможно сопоставить модулярную форму.

Одним из тех, кто тщетно пытался доказать существование связи между гипотезой Таниямы-Шимуры и Великой теоремы Ферма, был профессор Калифорнийского университета в Беркли Кен Рибет. С тех пор, как он побывал на докладе Фрея в Обервольфахе, его не покидала надежда доказать, что эллиптическая кривая Фрея слишком причудлива для того, чтобы быть модулярной. После восемнадцати месяцев усилий Рибет, как и все остальные, не продвинулся ни на шаг. Летом 1986 года коллега Рибета, профессор

Барри Мазур, приехал в Беркли для участия в Международном конгрессе математиков. Друзья встретились за чашечкой кофе в кафе «Стрáда» и принялись жаловаться друг другу на неудачи и брюзжать по поводу состояния дел в математике.

Когда же они, в конце концов, добрались до обсуждения последних новостей о различных попытках доказать причудливость эллиптической кривой Фрея, Рибет начал объяснять тот ход доказательства, которой он наметил. Этот подход позволял питать смутные надежды на успех, но Рибету удалось осуществить лишь малую часть из задуманного. «Я сидел с Барри и рассказывал о том, чем занимался все это время. Я упомянул, что мне удалось найти доказательство лишь для весьма частного случая, но что делать дальше, как обобщить его, превратив в полнокровное доказательство, я не знаю».

Профессор Мазур прихлебывал кофе и внимательно слушал Рибета. Вдруг он замер и с недоверием посмотрел на Кена. «Неужели Вы не видите? Вы уже доказали все, что требуется. Осталось лишь добавить гамма-нуль M -структуры, провести все доказательство с самого начала, и Вы получите все необходимое».

Рибет посмотрел на Мазура, потом заглянул в чашечку с кофе и снова посмотрел на Мазура. В жизни Рибета как математика это был самый важный момент, и он охотно вспоминает его в мельчайших подробностях. «Я ответил Мазуру, что он абсолютно прав. Как же я сам этого не заметил? Я был сильно удивлен потому, что мне и в голову не приходило добавить лишний гамма-нуль M -структуры. Ведь это так просто!»

Следует заметить, что добавление гамма-нуля M -структуры, звучавшее так просто для Кена Рибета, представляет довольно «хитроумную» часть доказательства.

> «Это был тот самый нюанс, которого мне недоставало, и теперь я видел его перед собой ясно и определенно. К себе в гостиничный номер я возвращался, как во сне. Я был полностью поглощен этой новой идеей. Меня не покидала мысль: "Боже, неужели это правильно?". Сев за стол, я принялся лихорадочно строчить в блокноте. Через час-другой я закончил все выкладки и убедился в том, что все ключевые шаги мной проверены и они прекрасно согласуются. Я еще раз просмотрел доказательство от начала и до конца. Все работало, как надо! На Международном конгрессе присутствовали тысячи математиков, и в беседе с некоторыми из коллег я упомянул о том, что мне удалось доказать, что Великая теорема Ферма следует из гипотезы Таниямы-Шимуры. Новость распространилась, как лесной пожар. Мои коллеги бросились ко мне с вопросом: «Правда ли, что Вам удалось доказать, что эллиптическая кривая Фрея не модулярна?» Я подумал минуту-другую и уверенно заявил: "Да!"».

Отныне Великая теорема Ферма была нерасторжимо связана с гипотезой Таниямы-Шимуры. Если бы кому-нибудь удалось доказать, что любая эллиптическая кривая модулярна, то из этого следовало бы, что уравнение Ферма не имеет решений в целых числах, и Великая теорема Ферма была бы тотчас же доказана.

На протяжении трех с половиной столетий Великая теорема Ферма была изолированной проблемой, занимательной и неразрешимой головоломкой на краю математики. Теперь Кен Рибет, вдохновленный Герхардом Фреем, передвинул проблему Ферма в центр событий. Самая занимательная проблема, остававшаяся нерешенной с XVII века, оказалась неразрывно связанной с самой значительной проблемой XX века. Головоломка огромного исторического и эмоционального значения оказалась связанной с гипотезой, способной революционизировать современную математику. Действительно, теперь математики могли подходить к доказательству Великой теоремы Ферма, придерживаясь стратегии доказательства от противного. Чтобы доказать, что Великая теорема Ферма верна, математики исходили из предположения, что она неверна. Из этого бы следовало, что гипотеза Таниямы-Шимуры неверна. Но если бы можно было доказать, что гипотеза Таниямы-Шимуры верна, то из этого следовало бы, что и Великая теорема Ферма

должна быть верна.

Но в течение тридцати лет доказать гипотезу Таниямы-Шимуры не удавалось, и надежд на успех оставалось все меньше. Пессимистом был даже Кен Рибет: «Я был одним из очень многих, кто считал гипотезу Таниямы-Шимуры совершенно не доказуемой. Я и не пытался доказывать ее. Об этом нечего было и думать. Эндрю Уайлс был, по-видимому, одним из немногих людей на Земле, кто осмелился попытаться доказать эту гипотезу».

Глава 6. Тайные вычисления

Кто знает толк в решении задач, должен обладать двумя несовместимыми качествами: живым воображением и несгибаемым упорством.

Говард У. Ивс

«Однажды вечером, в конце лета 1986 года, я попивал чай в гостях у своего приятеля. В беседе он между прочим упомянул о том, что Кену Рибету удалось доказать существование взаимосвязи между гипотезой Таниямы-Шимуры и доказательством Великой теоремы Ферма. Я почувствовал себя так, словно через меня пропустили мощный электрический разряд. Мне сразу стало ясно, что отныне весь ход моей жизни круто изменился: ведь от доказательства Великой теоремы Ферма меня отделяло теперь только одно препятствие: доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры. Значит, моя детская мечта — не пустой звук, а вполне реальное дело, которым стоит заниматься. Не медля ни минуты, я отправился домой и принялся за работу».

Более двух десятилетий прошло с того дня, когда Эндрю Уайлс нашел на библиотечной полке книгу Э.Т. Белла, вдохновившую его принять вызов, брошенный математикам Пьером де Ферма. Но только теперь Уайлс впервые отчетливо увидел путь к осуществлению своей детской мечты. Уайлс вспоминает, как резко за один вечер изменилось его отношение к гипотезе Таниямы-Шимуры: «Мне вспомнилось, как один знакомый математик отозвался о гипотезе Таниямы-Шимуры дерзко и уничижительно, назвав ее "упражнением для заинтересованного читателя". Ну что же, с этого вечера я стал очень заинтересованным читателем!»

Завершив под руководством профессора Джона Коутса работу над диссертацией на соискание ученой степени Ph.D. в Кембридже, Уайлс перебрался через Атлантику, в Принстонский университет, где ко времени описываемых событий успел стать профессором. Благодаря научному руководству Коутса, Уайлс, по-видимому, знал об эллиптических кривых больше, чем кто-либо другой в мире, но он прекрасно сознавал, что ни его обширные познания, ни отточенная техника решения математических задач не гарантируют успеха. Гипотеза Таниямы-Шимуры стояла перед ним подобно неприступной крепости.

В 1986 году Эндрю Уайлс узнал, что Великую теорему Ферма, возможно удастся доказать с помощью гипотезы Таниямы-Шимуры

Многие другие математики, в том числе и Джон Коутс, считали любые попытки доказать гипотезу Таниямы-Шимуры безнадежным делом: «Сам я весьма скептически относился к тому, что красивая связь между Великой теоремой Ферма и гипотезой Таниямы-Шимуры действительно приведет к какому-нибудь результату. Должен признаться, я не думал, что гипотеза Таниямы-Шимуры доказуема. Как ни красива эта проблема, решить ее не представлялось возможным. Я полагал, что мне не удастся увидеть ее доказанной при

жизни».

Уайлс знал, что шансы на успех у него чрезвычайно малы. Но даже если бы ему не удалось найти доказательство Великой теоремы Ферма, то он не считал бы, что усилия потрачены им напрасно: «Разумеется, гипотеза Таниямы-Шимуры долгие годы оставалась открытой. Ни у кого не было даже намеков на доказательство, но, по крайней мере, эта гипотеза оставалась в основном русле развития математики. Пытаясь найти доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры, я мог получить результаты, которые, хотя они и не позволят решить проблему в целом, все же можно будет считать хорошей математикой. Я не напрасно потрачу время. Итак, роман с Ферма, длившийся всю мою жизнь, сколько я себя помню, дополнился проблемой, которую высокие профессионалы считали неразрешимой».

На чердаке отшельника

В начале XX века великого математика Давида Гильберта спросили, почему он никогда не пытался доказать Великую теорему Ферма. На это Гильберт ответил: «Прежде чем начать, я должен был бы затратить года три на усиленную подготовку, а у меня нет столько времени, чтобы так расточительно расходовать его на решение проблемы, которое может закончиться неудачей». Уайлс сознавал, что для того, чтобы иметь хоть малейшую надежду найти доказательство, ему сначала необходимо с головой погрузиться в проблему, но, в отличие от Гильберта, был готов пойти на риск. Уайлс прочитывал все новейшие номера математических журналов и осваивал самые последние математические методы. Собирая оружие, необходимое для предстоящей битвы, Уайлс провел следующие восемнадцать месяцев, знакомясь даже с самыми незначительными результатами или методами, имевшими отношение к эллиптическим кривым и модулярным формам. Надо сказать, что, по его прикидкам, любая сколько-нибудь серьезная попытка доказательства вполне могла потребовать от математика-одиночки десятилетних усилий.

Уайлс отказался от всего, что не было напрямую связано с доказательством Великой теоремы Ферма. Он перестал принимать участие в нескончаемой веренице конференций и симпозиумов. Оставаясь сотрудником математического факультета Принстонского университета, Уайлс продолжал проводить учебные семинары, читать лекции для студентов и руководить курсовыми и дипломными работами.

> «Я имел обыкновение уединяться в кабинете, где пытался найти фрагменты решений тех или иных математических проблем, которые должны были стать частями единой мозаики… Эти фрагменты я пытался сопоставить с каким-нибудь прежним широким, на уровне понятий, пониманием различных разделов математики, которые могли бы прояснить ту проблему, над которой я размышлял. Иногда приходилось идти и заглядывать в какую-нибудь книгу, чтобы узнать, как эта задача решена там. Иногда это требовало слегка изменить известный результат, проделать какие-то дополнительные вычисления. Иногда я приходил к заключению, что все сделанное раньше совершенно бесполезно. В этом случае мне приходилось изобретать что-нибудь совершенно новое. Неизвестно, откуда что бралось.
>
> По существу, это одна из загадок мышления. Часто для того, чтобы привести в порядок мысли, бывает необходимо попытаться изложить их в письменном виде. Когда вы по-настоящему заходите в тупик, когда речь идет о настоящей проблеме, которую требуется решить, обычное традиционное математическое мышление не может помочь вам ничем. К новой идее ведет только длительный период необычайного сосредоточения на проблеме без каких-либо отвлечений. Необходимо действительно не думать ни о чем, кроме проблемы, полностью сосредоточиться на ней. Затем вы должны остановиться, после чего, насколько я могу судить, наступает период релаксации, во время которого вступает в игру подсознание, и в этот момент к вам приходит новая идея».

С того самого момента, когда Уайлс принял важное для себя решение заняться систематическим поиском доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры, он вознамерился работать в полной изоляции и секретности. В современной математике сложилась культура кооперации и сотрудничества, поэтому принятое Уайлсом решение могло бы показаться возвращением в прошлое. Он как бы подражал образу действий самого Ферма, самому знаменитому из математических отшельников. Свое решение работать в обстановке полной секретности Уайлс отчасти объясняет желанием работать без помех, не отвлекаясь от основной задачи: «Я понимал, что все, что имеет какое-то отношение к Великой теореме Ферма, вызывает слишком большой интерес. Нельзя как следует сосредоточиться на решении важной задачи, если полностью не отвлечься от всего постороннего. Слишком много зрителей заведомо мешают достижению цели».

Еще одним мотивом избранного Уайлсом курса на уединение и секретность была его жажда славы. Уайлс опасался, что когда он проделает основную часть доказательства, но ему не будет доставать заключительного элемента выкладок, весть о прорыве просочится наружу — и ничто не помешает какому-нибудь сопернику из числа коллег-математиков воспользоваться проделанной Уайлсом работой, завершить доказательство и похитить награду.

В последующие годы Уайлсу удалось совершить ряд чрезвычайно важных открытий, ни одно из которых не обсуждалось и не было опубликовано прежде, чем он довел доказательство до конца. Даже самые близкие его коллеги оставались в неведении относительно проводимых им исследований. Джон Коутс вспоминает, что в разговоре с Уайлсом несколько раз упоминал о гипотезе Таниямы-Шимуры, но Уайлс ничем не выдал своего интереса к проблеме: «Вспоминаю, что несколько раз упоминал в беседе с ним: "Эта связь с Великой теоремой Ферма просто великолепна, но пытаться искать доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры — совершенно безнадежное дело". Насколько мне помнится, Уайлс в ответ только улыбался».

Кен Рибет, установивший связь между Великой теоремой Ферма и гипотезой Таниямы-Шимуры, также пребывал в полном неведении относительно тайной деятельности Уайлса. «Вероятно, это единственный известный мне случай, когда кто-то работал над задачей так долго, ни словом не обмолвившись о том, чем он занимается, без обсуждения достигнутых успехов. В моем опыте это беспрецедентный случай. В математическом сообществе принято обмениваться идеями. Математики собираются на конференциях, навещают друг друга, устраивают семинары, обмениваются новостями по электронной почте, разговаривают по телефону, просят подкинуть свежую идею — связь друг с другом им просто необходима. Когда вы разговариваете с коллегами-математиками, вас дружески похлопают по спине, вам скажут, что вы сделали нечто важное, вам подскажут новые идеи. Это — своего рода поддержка. Если вы отрезаете себя от всего этого, то вы делаете нечто психологически очень странное».

Чтобы не возбуждать подозрений, Уайлс придумал хитрую уловку, которая должна была сбить его коллег со следа. В начале 80-х годов он выполнил обширное исследование одного конкретного типа эллиптической кривой и уже собрался было опубликовать его полностью, но открытия Рибета и Фрея заставили его изменить свои намерения. Уайлс решил публиковать свое исследование «по кусочкам», по одной небольшой статье каждые полгода. Это должно было убедить его коллег в том, что он все еще продолжает заниматься своими обычными исследованиями. И столько времени, сколько он сможет поддерживать свою «дымовую завесу», Уайлс сможет продолжать без помех заниматься предметом своей истинной страсти, не сообщая никому о полученных результатах.

О тайне Уайлса знал только один человек — его жена Нада. Они поженились вскоре после того, как Уайлс приступил к работе над доказательством, и, когда стали появляться первые результаты, он посвятил в свою тайну ее и только ее. В последующие годы семья была его единственным отвлечением от проблемы. «Только моя жена знала, что я работаю над доказательством Великой теоремы Ферма. Я рассказал ей об этом в наш медовый месяц,

через несколько дней после нашей свадьбы. Моя жена слышала о Великой теореме Ферма, но в то время она еще ничего не знала о том романтическом ореоле, который эта теорема имела в глазах математиков, и о том, каким шипом она оставалась в теле нашей науки столь долгие годы».

Дуэль с бесконечностью

Чтобы доказать Великую теорему Ферма, Уайлсу было необходимо сначала доказать гипотезу Таниямы-Шимуры о том, что каждой эллиптической кривой можно поставить в соответствие некоторую модулярную форму. Многие математики отчаянно пытались доказать эту гипотезу, но все попытки окончились неудачей. Уайлс хорошо сознавал, какие чудовищные трудности ожидают его на пути к доказательству: «В конце концов всё, что наивно надеялись сделать одни и что действительно пытались сделать другие, сводилось к тому, чтобы пересчитать эллиптические кривые и модулярные формы и показать, что число одних совпадает с числом других. Но никто и никогда не предложил простого способа, который позволил бы сделать это. Первая трудность состоит в том, что существует бесконечно много эллиптических кривых и бесконечно много модулярных форм, и поэтому количество тех и других невозможно выразить конечным числом».

Уайлс решил воспользоваться своим обычным подходом к решению трудных задач. «Иногда я записываю на листке бумаги каракули. Строго говоря, они ничего не обозначают. Это, так сказать, подсознательные каракули. Компьютером я не пользуюсь никогда». Во многих задачах теории чисел, компьютеры оказываются совершенно бесполезными. Гипотеза Таниямы-Шимуры относится к бесконечно многим уравнениям, и хотя компьютер может проверить за несколько секунд каждый отдельный случай, он никогда не сможет проверить все случаи. Требовалось нечто другое: логическое рассуждение, которое допускало бы разбиение на отдельные шаги, которое бы в целом указывало причину и давало объяснение, почему все эллиптические кривые без исключения должны соответствовать модулярным формам. И в поиске доказательства Уайлс полагался только на листок бумаги, карандаш и свой разум. «Я не забывал ни на миг о своей цели. С этим я просыпался по утрам, над этим размышлял весь день, об этом думал, засыпая. Не отвлекаясь, я только и делал, что размышлял и размышлял над всем этим».

После года размышлений Уайлс решил избрать за основу доказательства общий метод, известный под названием индукции. Индукция — чрезвычайно мощный способ доказательства, поскольку он позволяет математику доказать, что утверждение справедливо для бесконечно многих случаев, доказав, что оно справедливо только в одном случае. Например, представим себе, что некий математик хочет доказать, что какое-то утверждение справедливо для всех натуральных чисел от 1 до бесконечности. Первый шаг состоит в том, чтобы убедиться в истинности этого суждения для числа 1, что обычно достигается прямой проверкой. Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, что если утверждение верно для числа 1, то оно должно быть верно для числа 2, а если оно верно для числа 2, то оно должно быть верно для числа 3, а если оно верно для числа 3, то оно должно быть верно для числа 4 и т. д. Более общо, математик должен показать, что если утверждение верно для некоторого числа n , то оно должно быть верно для следующего числа n +1.

По существу доказательство по индукции представляет собой процесс, состоящий из двух частей:

1. доказательство того, что утверждение верно в первом случае;

2. доказательство того, что если утверждение верно для какого-нибудь одного случая, то оно должно быть верным для следующего случая.

Другой способ наглядно представить себе доказательство по индукции заключается в том, чтобы бесконечное количество случаев сравнить с бесконечным множеством костей домино. Чтобы доказать каждый случай, необходимо найти способ, позволяющий сбить каждую из костей домино. Если сбивать домино одно за другим, то на это потребуется

затратить бесконечно много усилий. Но доказательство по индукции позволяет математикам сбить все домино, сбив только первую кость. Если домино расставлены правильно, то первое домино, упав, собьет второе домино, оно в свою очередь собьет третье и т. д. до бесконечности. Доказательство по индукции порождает эффект домино. Математический аналог этого явления (падая, каждая кость домино, сбивает следующую, поэтому достаточно повалить одну-единственную кость домино, как повалятся все остальные кости до единой) позволяет доказать бесконечно много случаев, доказав один-единственный первый случай. В Приложении 10 показано, как доказательство по индукции можно использовать для доказательства сравнительно простого математического утверждения относительно всех чисел.

Задача, стоявшая перед Уайлсом, требовала построить индуктивное рассуждение, которое показывало бы, что каждой из бесконечно многих эллиптических кривых может быть поставлено в соответствие какая-то из бесконечно многих модулярных форм, и, наоборот, каждая модулярная форма может быть поставлена в соответствие какой-то из бесконечно многих эллиптических кривых. Каким-то образом Уайлсу предстояло разделить доказательство на бесконечно много отдельных случаев, а затем доказать первый случай. Затем Уайлсу требовалось доказать, что, толкнув первую кость домино (доказав первый случай), он вызовет эффект домино (все остальные случаи будут доказаны). И в конце концов Уайлс пришел к заключению, что первый шаг его индуктивного доказательства скрыт в работе одного трагически погибшего математического гения, жившего и работавшего во Франции в XIX веке.

* * *

Эварист Галуа родился в Бур-ля-Рейне, небольшой деревушке, расположенной к югу от Парижа, 25 октября 1811 года, ровно через 22 года после Французской революции. Наполеон Бонапарт находился в ту пору в расцвете сил, но в следующем году пережил разгром в Русской кампании и в 1814 году был отправлен в ссылку. На французский трон взошел король Людовик XVIII. В 1815 году Наполеон бежал с острова Эльбы, вернулся в Париж и восстановил свою власть, но через сто дней потерпел поражение в битве при Ватерлоо и был вынужден снова отречься в пользу Людовика XVIII. Подобно Софи Жермен, Галуа рос в период великой смуты, но если Жермен отрешилась от бурных событий Французской революции и сосредоточилась на математике, то Галуа неоднократно оказывался в самом центре политических споров, которые не только помешали ему сделать академическую карьеру, но и привели к его безвременной кончине.

Помимо общей смуты, неизбежно сказывавшейся на жизни каждого француза, интерес Галуа к политике возник под влиянием его отца Николя-Габриэля Галуа. Когда Эваристу Галуа исполнилось четыре года, его отец был избран мэром Бур-ля-Рейна. Это было время триумфального возвращения Наполеона к власти, и либеральные ценности, высоко ценимые отцом Галуа, отвечали тогда духовному настрою нации. Николя-Габриэль Галуа был культурным и обходительным человеком, и в первые годы своего пребывания на посту мэра он снискал уважение всего населения. Даже когда Людовик XVIII опять взошел на трон, отец Галуа был снова выбран мэром. Вне политики его любимым занятием было сочинение эпиграмм, которые он, к восторгу своих сторонников, читал на собраниях жителей города. Много лет спустя именно недюжинный талант эпиграмматиста привел его к падению.

Когда Эваристу Галуа исполнилось двенадцать лет, он поступил в первую свою школу — лицей Людовика Великого, престижное учебное заведение с жесткой дисциплиной. Сразу же скажем, что Галуа не слушал никаких математических курсов, и его успехи вообще не были выдающимися. Но в первый же семестр произошло событие, которое оказало влияние на всю его жизнь. До Революции лицей был иезуитским колледжем, и теперь появились слухи, что лицей снова возвращается под власть священников. В то время между

монархистами и республиканцами шли бесконечные споры, равновесие власти между Людовиком XVIII и представителями народа нарушалось в пользу то одной, то другой стороны.

Возрастающее влияние священнослужителей в такой атмосфере могло рассматриваться как указание на перевес власти в пользу короля. Учащиеся лицея, в большинстве своем придерживавшиеся республиканских взглядов, решили поднять восстание, но директор лицея месье Берто раскрыл заговор и, не колеблясь, исключил с десяток зачинщиков. На следующий день, когда месье Берто потребовал от остальных учащихся старших классов демонстративного выражения лояльности, учащиеся лицея отказались поднять тост за Людовика XVIII, после чего было исключены еще сто учащихся. Галуа был еще слишком юн для того, чтобы участвовать в провалившемся восстании, и поэтому остался в лицее. Но унижения, которым на его глазах подверглись его товарищи, только усилили его республиканские настроения.

Лишь в возрасте шестнадцати лет Галуа записался на первый в своей жизни математический курс, который, по мнению преподавателей лицея, превратил Галуа из послушного ученика в учащегося, который сильно выделялся среди остальных. Судя по отметкам, он стал пренебрегать всеми другими предметами и сосредоточил все свое внимание на новом для него предмете, которому он отдался со всем пылом души.

> «Этот учащийся занимается только самым высшими разделами математики. Юношей овладело какое-то математическое безумие. Думаю, что для него было бы лучше всего, если бы родители позволили ему заниматься только математикой. Иначе он только напрасно теряет здесь время и мучает преподавателей, навлекая на себя множество наказаний».

Скоро ненасытная жажда математических познаний со стороны Галуа намного превзошла то, что могли ему дать учителя, и Галуа стал учиться по книгам, написанными наиболее выдающимися учеными того времени. Галуа легко усваивал сложнейшие понятия, и к тому времени, когда ему исполнилось семнадцать лет, он опубликовал свою первую работу в журнале «Annales de Gergonne». Казалось, путь, открывавшийся перед вундеркиндом, был ясен.

Единственным препятствием на пути к успеху был необычайный блеск, присущий его разуму. Познания Галуа в математике значительно превосходили тот уровень знаний, который был необходим для сдачи экзаменов за курс лицея, и решения Галуа нередко были настолько оригинальны и изысканны, что его экзаменаторы не могли по достоинству оценить их. Непонимание со стороны преподавателей усугублялось тем, что многие вычисления Галуа производил в уме и не трудился ясно изложить их на бумаге, что еще больше затрудняло работу преподавателей и вызывало у них раздражение.

Юный гений отнюдь не способствовал смягчению ситуации, так как отличался вспыльчивостью и опрометчивостью поступков, что не вызывало симпатии к нему. Когда Галуа подал документы в самое престижное высшее учебное заведение Франции — Политехническую школу (École Polytechnique), — краткость решений и отсутствие каких-либо пояснений на устном экзамене привели к тому, что Галуа не был принят. Между тем Галуа во что бы то ни стало хотел поступить туда не только потому, что это было самое лучшее учебное заведение, но и потому, что оно славилось как центр республиканцев. Через год Эварист Галуа предпринял еще одну попытку поступить в École Polytechnique, и снова на устном экзамене по математике «скачки» в логике его рассуждений только смутили экзаменатора месье Дине. Чувствуя, что он на грани второго провала, и разочарованный тем, что его блестящие способности не получили должного признания, Галуа вышел из себя и швырнул в Дине тряпкой. Бросок оказался точным. Больше Галуа никогда не возвращался в священные аудитории École Polytechnique.

Неудачи на вступительных экзаменах не поколебали уверенность Галуа в своем математическом таланте, и он продолжал свои приватные исследования. Его основной

интерес был сосредоточен на решении алгебраических уравнений. Как известно, квадратные уравнения имеют вид

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c могут иметь любые значения. Задача состоит в том, чтобы найти такие значения x, которые удовлетворяют этому квадратному уравнению. Метод проб и ошибок не удовлетворяет математиков. Они предпочитали бы иметь рецепт, позволяющий находить решения, и к счастью такой рецепт действительно существует:

Подставляя значения a, b и c в эту формулу, мы получаем правильные значения x. Например, приведенный выше рецепт можно применить к уравнению

$$2x^2–6x + 4 = 0,$$

где a =2, b =–6 и c =4. Подставляя значения a, b и c, мы получаем x =1 или x =2. Квадратные уравнения — это частный случай гораздо более широкого класса уравнений, известных под названием полиноминальных. Полиноминальным уравнением более сложным, чем квадратное, является кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Дополнительное осложнение возникает из-за члена ax^3. Добавляя еще один член, x^4, мы получаем еще один вид полиноминального уравнения, известного как уравнение четвертой степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

К началу XIX века математикам были известны рецепты, позволяющие находить решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени, но не был известен метод решения уравнений пятой степени

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Галуа увлекся идеей найти рецепт для решения уравнений пятой степени. Это была одна из наиболее трудных проблем современной ему математики. К тому времени, когда Галуа исполнилось семнадцать лет, он сумел продвинуться в решении этой проблемы настолько, что представил Академии наук два мемуара с результатами своих исследований. Рецензентом, которому мемуары поступили на отзыв, был Огюстен Луи Коши — тот самый, кто много лет спустя вступит в полемику с Ламе по поводу пробела в доказательстве Великой теоремы Ферма. Работы юного Галуа произвели на Коши сильное впечатление, и он счел, что мемуары Галуа заслуживают быть представленными на премию Академии по математике. Чтобы удовлетворить формальным требованиям, предъявляемым к работам, представленным на конкурс, оба мемуара следовало объединить в один, поэтому Коши вернул работы Галуа и стал ожидать, когда тот подаст их уже в виде одного мемуара.

После несправедливой критики преподавателей лицея и двукратного провала на вступительных экзаменах в École Polytechnique гений Галуа был уже на грани признания, но ряд личных и профессиональных трагедий, пережитых им в следующие три года, поставили крест на его честолюбивых замыслах. В июле 1829 года в городок Бур-ля-Рейн, мэром которого все еще оставался отец Галуа, прибыл новый священник-иезуит. Он с неодобрением отнесся к республиканским симпатиям мэра и начал кампанию по смещению того с поста, распространяя всяческие дискредитирующие мэра слухи. В частности, иезуит воспользовался тем, что Николя-Габриэль Галуа сочинял остроумные эпиграммы. Священник-интриган написал ряд грубых стишков, высмеивавших местных жителей и подписал их именем мэра. Галуа-старший не выдержал позора и последовавших кривотолков и решил, что единственный достойный выход из создавшегося положения состоит в том, чтобы покончить жизнь самоубийством.

Эварист Галуа прибыл на похороны отца и своими глазами увидел, на какие враждующие стороны разделилось население Бур-ля-Рейна под влиянием нового священника. Когда гроб опускали в могилу, между священником-иезуитом, проводившим

заупокойную службу и сторонниками мэра, осознавшими, что против него был составлен заговор, завязалась потасовка. Священник получил удар в голову, потасовка переросла в драку, а гроб бесцеремонно столкнули в могилу. Наблюдая за поруганием и разрушением устоев государственной власти, укреплению которой его отец отдал многие годы жизни, Галуа все более убеждался в правильности своего выбора в пользу дела республиканцев.

По возвращении в Париж Галуа задолго до последнего срока объединил оба своих мемуара в один и представил свою работу непременному секретарю Академии Жозефу Фурье, который, как предполагалось, должен был передать ее жюри конкурса на соискание премии. В своем мемуаре Галуа не предлагал готового рецепта решения уравнения пятой степени, но высказывал блестящую идею, и, по мнению многих математиков, в том числе Коши, был одним из наиболее вероятных кандидатов на получение премии. К величайшему разочарованию, чтобы не сказать потрясению, самого Галуа и его друзей, он не только не получил премию, но даже не был официально допущен в конкурсу. Фурье умер за несколько недель до заседания конкурсной комиссии, и хотя в его бумагах была обнаружена целая кипа работ, представленных на соискание премии, мемуара Галуа среди них не было. Этот мемуар так никогда и не был найден. Вот как описывает столь вопиющую несправедливость один французский журналист.

«1-го марта прошлого года месье Галуа передал непременному секретарю Института мемуар о решении численных уравнений. Этот мемуар должен был быть представлен на соискание премии по математике, и он действительно заслуживал премии, поскольку позволял преодолеть некоторые трудности, с которыми не сумел справиться Лагранж. Месье Коши высоко оценил шансы автора мемуара на высшую премию. И что же случилось? Мемуар утерян, и премия присуждена без участия молодого ученого…» (Ле Глоб, 1831).

Галуа считал, что его мемуар был умышленно утерян политически небеспристрастной Академией, и это его убеждение еще больше укрепилось через год — Академия отвергла его новый мемуар, мотивируя свой отказ тем, что его «аргументация недостаточна ясна, и недостаточно развернута для того, чтобы мы могли судить о ее строгости». Галуа решил, что против него существует тайный заговор, цель которого состоит в том, чтобы исключить его из математического сообщества. И он пренебрег своими исследованиями, оставив их ради политической борьбы на стороне республиканцев. К тому времени он был студентом Нормальной школы (École Normale) — высшего учебного заведения, лишь немногим менее престижного, чем École Polytechnique. В École Normale высокая репутация Галуа как математика затмевала его дурную славу возмутителя спокойствия. Кульминация событий наступила во время июльской революции 1830 года, когда Карл X бежал из Франции, и борьба за власть выплеснулась на улицы Парижа. Директор École Normale месье Гиньо, монархист по убеждениям, знал, что большинство его студентов были радикальными республиканцами. Он приказал им разойтись по спальням и запер ворота учебного заведения на замок. Галуа не мог принять участия в борьбе плечом к плечу со своими соратниками, и, когда республиканцы в конце концов потерпели поражение, его разочарованию и гневу не было предела. Воспользовавшись первой же возможностью, он опубликовал язвительную заметку о директоре École Normale, обвиняя его в трусости. Неудивительно, что Гиньо исключил непокорного студента, и формально карьера Галуа как математика на этом завершилась.

4 декабря своенравный гений вознамерился стать профессиональным революционером, предприняв попытку записаться в артиллерию Национальной гвардии — республиканского рода войск, известного под названием «Друзья народа». Но еще до конца месяца новый король Луи-Филипп, опасаясь дальнейшего расширения восстания, распустил артиллерию Национальной гвардии. Галуа остался без средств к существованию и без дома. Самый блестящий юный талант во всем Париже мог быть задержан на каждом углу как бродяга. Некоторых из его бывших коллег-математиков положение Галуа беспокоило все больше и больше. Софи Жермен, ставшая к тому времени почтенной статс-дамой французской математики, выразила свою озабоченность случившимся в письме к другу семейства графу

Либри-Каруччи: «Решительно во всем, что касается математики, нас преследует невезение. Смерть месье Фурье стала последним ударом для этого студента, Галуа, который, несмотря на всю свою дерзость, обнаружил недюжинные математические способности. Он был исключен из École Normale, остался без средств к существованию, у его матери средств тоже очень мало, и он продолжает вести себя вызывающе. Говорят, что он окончательно сойдет с ума. Боюсь, что это так».

Покуда Галуа продолжал с присущей ему страстью заниматься политикой, его положение не могло не ухудшаться, что подтверждается свидетельством Александра Дюма. Великий французский писатель был приглашен на банкет по случаю оправдания девятнадцати республиканцев, ранее обвиненных в антиправительственном заговоре. Он оставил описание этого события: «Внезапно посреди беседы, которую я вел с соседом слева, послышалось имя Луи-Филиппа, после чего кто-то свистнул пять или шесть раз. Я обернулся. Самая оживленная сцена разворачивалась через пятнадцать-двадцать мест за столом от меня. Трудно было бы найти во всем Париже человек двести, настроенных более враждебно по отношению к правительству, чем те, что собрались в тот день в пять часов пополудни в длинном зале на первом этаже над садом.

Молодой человек поднял свой бокал, держа в той же руке обнаженный кинжал, и пытался перекричать окружающих. Это был Эварист Галуа — один из самых ярых республиканцев. Шум стоял такой, что разобраться в его причинах было невозможно. Я мог понять лишь, что была высказана угроза и упомянуто имя Луи-Филиппа: о намерениях красноречиво свидетельствовал обнаженный кинжал.

Происходившее явно выходило за рамки моих республиканских воззрений. Я поддался настояниям моего соседа слева, которому как королевскому коменданту не хотелось компрометировать себя, и мы выпрыгнули из окна в сад. Несколько обеспокоенный, я отправился домой. Было ясно, что происшедший эпизод не останется без последствий. И действительно, через два-три дня Эварист Галуа был арестован».

После месячного заключения в тюрьме Сент-Пелажи Галуа было предъявлено обвинение в угрозе жизни короля, и он предстал перед судом. Хотя действия Галуа не оставляли сомнения в его виновности, царившие на банкете шум и неразбериха привели к тому, что никто из присутствовавших на банкете не мог утверждать, будто слышал от Галуа прямые угрозы в адрес короля. Судья, сочувственно относившийся к обвиняемому, принял во внимание его юный возраст (Галуа едва исполнилось двадцать лет) и вынес оправдательный приговор. Но через месяц Галуа был снова арестован.

В День Бастилии, 14 июля 1831 года, Галуа прошествовал через Париж в форме объявленной вне закона артиллерии Национальной гвардии. За это он был осужден на шесть месяцев тюремного заключения и вернулся в тюрьму Сент-Пелажи. За несколько следующих месяцев окружавшие Галуа подонки приучили его к пьянству. Ботаник и ярый республиканец Франсуа Распай, отбывавший заключение в тюрьме за отказ принять от Луи-Филиппа Крест Почетного Легиона, стал свидетелем того, как Галуа напился впервые в жизни:

> «Он взял в руки стаканчик вина с таким видом, с каким Сократ мужественно принял чашу с цикутой; Галуа выпил вино залпом, не моргнув глазом и скорчил зверскую мину. Опустошить второй стаканчик было ничуть не труднее, чем первый, за вторым стаканчиком последовал третий. Новичок утратил равновесие. Триумф! Честь и хвала Бахусу тюрьмы Сент-Пелажи! Ты отравил блестящий разум человека, со страхом взявшего вино в руки».

Через неделю снайпер, стрелявший из мансарды напротив тюрьмы, попал в соседа Галуа по камере. Галуа был убежден, что пуля предназначалась ему, что против него существовал правительственный заговор и его намеревались убить. Мысль о политических преследованиях не покидала его ни днем, ни ночью. Он был изолирован от друзей и семьи, его математические идеи были отвергнуты, — все это повергло Галуа в состояние глубокой

депрессии. Допившись до белой горячки, Галуа пытался заколоть себя кинжалом, но Распаю и другим заключенным удалось схватить его и обезоружить. Распай вспоминает слова, произнесенные Галуа непосредственно перед попыткой совершить самоубийство: «Знаете, чего мне не достает? Друга! Признаюсь только вам: это должен быть человек, которого я смогу полюбить всей душой. Я потерял отца, и никто мне его не заменит, слышите?»

В марте 1832 года, за месяц до истечения срока, к отбыванию которого был приговорен Галуа, в Париже вспыхнула эпидемия холеры, и заключенные тюрьмы Сент-Пелажи были выпущены на свободу. О том, что случилось с Галуа в следующие несколько недель, ходили различные слухи. Достоверно известно лишь, что в это время начался его роман с некоей таинственной женщиной по имени Стефани Фелиции Потери дю Мотель, дочерью почтенного парижского врача. Хотя никто не может сколько-нибудь достоверно сказать, с чего начался этот роковой роман, подробности его трагической развязки превосходно документированы.

Стефани уже была помолвлена с неким господином по имени Пешо д'Эрбенвилль, который пришел в ярость, обнаружив, что невеста ему не верна. Д'Эрбенвилль, будучи одним из лучших стрелков Франции, без колебаний послал Галуа вызов на дуэль. Галуа был хорошо осведомлен о репутации своего противника. В ночь накануне поединка, полагая, что это последняя для него возможность изложить свои идеи на бумаге, Галуа пишет письма друзьям, объясняя свои обстоятельства:

> «Я прошу моих друзей не винить меня за то, что я умираю не за свою страну. Я умираю, став жертвой бесчестной кокетки и двух глупцов, обманутых ею. Я завершаю свою жизнь, как жертва жалкой клеветы. О, почему я должен умереть за нечто столь ничтожное, столь презренное? Я призываю небеса в свидетели, что только под нажимом, уступая силе, я поддался на провокацию, которую изо всех сил пытался предотвратить».

Несмотря на приверженность республиканским идеям и романтическое приключение, Галуа всегда оставался верен своему увлечению математикой. Более всего он опасался, что его мемуар, уже отвергнутый Академией, будет утрачен навсегда. В отчаянной попытке обрести признание, он всю ночь напролет излагал на бумаге теоремы, которые, по его убеждению, полностью объясняли загадку уравнений пятой степени. На рис. 22 вы видите одну из последних страниц, написанных Галуа в ночь перед дуэлью. На этих страницах Галуа изложил в основном те же идеи, которые он ранее представил Коши и Фурье. На этот раз эти идеи были скрыты за алгебраическими выкладками и перемежались время от времени упоминаниями о «Стефани» или о «той женщине» и преисполненными отчаяния восклицаниями: «У меня нет времени! У меня нет времени!» На исходе ночи Галуа закончил вычисления и написал сопроводительное письмо своему другу Огюсту Шевалье с просьбой передать бумаги в случае гибели его, Галуа, на дуэли величайшим математикам Европы:

> «Мой дорогой друг!
>
> Я сделал несколько открытий в области анализа. Первое из них относится к теории уравнений пятой степени и других целых функций.
>
> В теории уравнений я исследовал условия разрешимости уравнений в радикалах; мне представился случай углубить эту теорию и описать все возможные преобразования уравнения, даже если оно не разрешимо в радикалах. Все это изложено здесь в трех мемуарах…
>
> За мою жизнь я часто отваживался выдвигать утверждения, в которых я сам не был уверен. Но все написанное было мне ясно более года, и было бы не в моих интересах оставаться под подозрением, будто я высказывал теоремы, не располагая доказательством.
>
> Попроси Якоби или Гаусса опубликовать их мнение не о том, верны ли мои теоремы, а о том, насколько они важны. Я надеюсь, что найдутся несколько человек, которые сочтут полезным разобраться в моих каракулях.

Дружески обнимаю тебя. *Э. Галуа* »

В ночь накануне дуэли Галуа попытался изложить все свои математические идеи в письменном виде. Впрочем, в тексте встречаются и замечания не математического содержания. На этой странице слева и ниже от центра стоят слова «Une femme» (некая женщина) второе слово зачеркнуто. Возможно это упоминание о той женщине из-за которой состоялась дуэль

Когда Галуа в роковую ночь отчаянно пытался записать все наиболее важные положения своей теории, ему вдруг стало ясно, что он может не успеть осуществить задуманное. Слова «je n'ai pas le temps» (у меня нет времени) читаются в конце двух строк в нижней части страницы

На следующее утро, в среду 30 мая 1832 года, Галуа и д'Эрбенвилль сошлись на расстоянии двадцати пяти шагов. Стрелялись на пистолетах. Д'Эрбенвилля сопровождали два секунданта, Галуа был один. Он никому не сообщил о предстоящей дуэли. В записке, посланной брату Альфреду, о дуэли не сообщалось ни слова. Лишь через несколько дней, когда до друзей стали доходить письма, написанные Галуа в ночь накануне дуэли, они узнали о случившемся.

Но вот пистолеты подняты, прозвучали выстрелы. Д'Эрбенвилль остался стоять, Галуа получил пулю в живот. Хирурга, который мог бы оказать срочную помощь, на месте дуэли не было, и победитель спокойно удалился, предоставив раненному противнику умирать. Через несколько часов на место дуэли прибыл Альфред Галуа и отвез брата в больницу Кошена. Но было поздно: начался перитонит, и на следующий день Галуа умер.

Похороны Эвариста Галуа походили на фарс, как и похороны его отца. Полиция, опасаясь, что похороны Галуа перерастут в политический митинг, арестовала накануне ночью тридцать его товарищей. Тем не менее, проводить Галуа пришли две тысячи республиканцев, и между его единомышленниками и правительственными официальными лицами, которые прибыли, чтобы своими глазами наблюдать за происходящим, вспыхнули неизбежные потасовки.

Республиканцы были в ярости: все больше распространялось мнение о том, что д'Эрбенвилль был не обманутым женихом, а правительственным агентом, и что Стефани была не просто любовницей Галуа, а коварной соблазнительницей. Такие события, как выстрел, прозвучавший, когда Галуа находился в тюрьме Сент-Пелажи, также указывали, что уже в то время против Галуа существовал заговор с целью его убийства — слишком много хлопот он причинял властям своим неуемным характером. И друзья Галуа решили, что он обманным путем был вовлечен в роман, который был частью существовавшего против него заговора. Историки и поныне продолжают спорить по поводу того, была ли дуэль исходом трагического романа, или корни ее следует искать в политических разногласиях между республиканцами и монархистами. Но, как бы то ни было, величайший математик того времени был убит, когда ему исполнился всего двадцать один год и он успел проучиться математике только пять лет.

Прежде чем рассылать мемуары Галуа, его брат и Огюст Шевалье переписали их, чтобы сделать объяснения более понятными. Галуа, по своему обыкновению, излагал идеи торопливо, опуская существенные подробности. Этот недостаток его стиля усугубился тем, что на изложение результатов исследований, которыми он занимался несколько лет, у него была только одна ночь.

Выполняя волю Эвариста Галуа, Огюст Шевалье и Альфред Галуа разослали копии рукописи Карлу Гауссу, Карлу Якоби и другим выдающимся математикам, но прошло почти десять лет прежде, чем его работа была оценена по достоинству. Впервые это произошло,

когда одну из копий получил в 1846 году Жозеф Лиувилль. Прочитав полученную рукопись, Лиувилль ощутил в ней искру гения и потратил несколько месяцев на то, чтобы разобраться в этих заметках. В конце концов Лиувилль отредактировал мемуары Галуа и опубликовал в своем престижном журнале «Journal de Mathèmatiques pures et appliquées». Многие математики живо откликнулись на эту публикацию, потому что Галуа продемонстрировал полное понимание того, как следует действовать, чтобы найти решения уравнений пятой степени. Сначала Галуа разделил все уравнения пятой степени на два типа: уравнения разрешимые и неразрешимые, а затем для разрешимых уравнений предложил рецепт, как найти решения таких уравнений. Кроме того, Галуа рассмотрел уравнения более высокого порядка, содержащие x^6, x^7 и т. д., и смог указать, какие из них разрешимы. Его труд стал одним из шедевров математики XIX века.

В предисловии к работам Галуа Лиувилль пустился в рассуждения о том, почему этот молодой математик был отвергнут старшими коллегами и как его, Лиувилля, собственными усилиями Галуа был возрожден: «Гипертрофированное стремление к точности было причиной того дефекта, которого всеми силами следует избегать при изучении абстрактных и загадочных проблем Алгебры. Ясность тем более необходима, чем дальше автор пытается увести читателя от проторенного пути вглубь неизвестной территории. Как говорил Декарт, "при рассмотрении трансцендентальных вопросов нужно быть трансцендентально ясным".

Галуа слишком часто пренебрегал этим предписанием, и мы можем понять, как знаменитые математики своими суровыми мудрыми советами пытались наставить на истинный путь новичка, гениально одаренного, но неопытного. Автор, которого они осудили, был перед ними, преисполненный рвения, деятельный; он мог бы извлечь пользу из данного ему совета.

Но теперь все изменилось. Галуа больше нет с нами! Не будем вдаваться в бесполезную критику; оставим же его недостатки и обратимся к достоинствам…

Мое усердие было вознаграждено, и я испытал необычайное удовлетворение в тот момент, когда, восполнив мелкие пробелы, убедился в правильности метода, с помощью которого Галуа доказал эту прекрасную теорему».

Вычисления Галуа концентрировались вокруг так называемой теории групп — идеи, которую Галуа превратил в мощное оружие, способное решать проблемы, ранее казавшиеся неразрешимыми. С точки зрения математики, группа представляет собой множество элементов, над которыми можно производить некоторую операцию (обычно ее называют сложением или умножением), удовлетворяющую определенным условиям. Важным свойством группы является ее *замкнутость* относительно этой операции: комбинируя любые два элемента группы с помощью операции, мы получаем другой элемент, также принадлежащий группе.

Например, целые числа образуют группу относительно операции сложения. Комбинируя с помощью операции сложения одно целое число с другим, мы получаем третье целое число, например,

4 + 12 = 16 .

Все возможные результаты сложения целых чисел всегда являются целыми числами, и математики, констатируя это обстоятельство, говорят, что «целые числа замкнуты относительно сложения», или «целые числа образуют группу по сложению». Однако, целые числа не образуют группу относительно операции деления, поскольку при делении одного целого числа на другое результат не обязательно будет целым числом, например, 4:12=1/3.

Дробь 1/3 — не целое число, оно выходит за пределы исходного множества целых чисел. Но если рассматривать более широкое множество так называемых рациональных чисел, то замкнутость относительно операции деления восстанавливается: рациональные числа замкнуты относительно деления. Даже после того, как эти слова произнесены, необходимо соблюдать осторожность, так как деление на нуль (элемент множества рациональных чисел) приводит к различным математическим кошмарам. Поэтому точнее было бы утверждение: рациональные числа без нуля замкнуты относительно деления. Во

многих отношениях замкнутость аналогична понятию полноты, описанному в предыдущих главах.

Целые числа и рациональные числа, или дроби, содержат бесконечное число элементов, и можно было бы предположить, что чем больше группа, тем больший интерес она вызывает к себе в математике. Но Галуа придерживался философии «чем меньше, тем лучше» и показал, что небольшие тщательно построенные группы могут обладать весьма богатым набором свойств. Вместо того, чтобы воспользоваться бесконечными группами, Галуа начал с конкретного уравнения и построил свою группу из нескольких решений этого уравнения. Именно группы, образованные из решений уравнений пятой степени, позволили Галуа получить результаты об этих уравнениях. Через полтора столетия Уайлс воспользовался теорией Галуа как одной из основ для своего доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры.

* * *

Чтобы доказать гипотезу Таниямы-Шимуры, математикам было необходимо показать, что каждое из бесконечного множества эллиптических уравнений может быть поставлено в соответствие с какой-то модулярной формой. Первоначально математики пытались показать, что целая молекула ДНК одного эллиптического уравнения (*E* -ряд) может быть поставлена в соответствие целой молекуле ДНК (*M* -ряд) одной модулярной формы. Хотя такой подход вполне разумен, никому не удалось повторить процесс установления такого соответствия для бесконечно многих эллиптических уравнений и модулярных форм.

Уайлс избрал совершенно другой подход к этой проблеме. Вместо того, чтобы пытаться установить соответствие между всеми элементами *E* -ряда и всеми элементами *M* -ряда, а затем переходить к следующим рядам, он попытался установить соответствие между одним членом *E* -ряда и одним членом *M* -ряда, а затем переходить к следующей паре элементов. Иначе говоря, каждый *E* -ряд состоит из бесконечной последовательности элементов, своего рода генов, образующих ДНК эллиптического уравнения, и Уайлс хотел показать, что первый ген в каждом *E* -ряде можно поставить в соответствие первому гену какого-то *M* -ряда. Затем он доказал бы, что второй член *E* -ряда может быть поставлен в соответствие второму члену *M* -ряда, и т. д.

При традиционном подходе мы получили бы бесконечную задачу, состоявшую в том, что даже если бы удалось доказать соответствие между всеми членами каких-то конкретных *E* - и *M* -рядов, то и в этом случае осталось бы доказать, что такое соответствие может быть установлено между бесконечно многими остальными *E* -рядами и *M* -рядами. Избранная Уайлсом тактика обладала одним большим преимуществом.

Решающее значение имело то обстоятельство, что в методе Уайлса члены в *E* -рядах обладают естественным упорядочением, поэтому после того, как установлено соответствие между первыми членами ($E_1=M_1$), следующим шагом является установление соответствия между вторыми членами ($E_2 = M_2$), и т. д.

Именно такой естественный порядок был необходим Уайлсу, чтобы создать доказательство по индукции. Прежде всего Уайлсу было необходимо доказать, что первый элемент *E* -ряда можно поставить в соответствие первому элементу некоторого *M* -ряда. Затем ему было необходимо доказать, что если соответствие между первыми элементами рядов установлено, то оно будет установлено и между вторыми, третьими и т. д. элементами. Уайлсу было необходимо опрокинуть первую кость домино и доказать, что любое опрокинутое домино вызовет падение следующего домино.

Первый шаг в осуществлении этой программы был сделан, когда Уайлс понял всю мощь групп Галуа. Чтобы создать такую группу, можно было воспользоваться несколькими решениями уравнения, соответствующего эллиптической кривой. После анализа, на который ушло несколько месяцев, Уайлс доказал, что группы Галуа позволяют прийти к одному несомненному заключению: первый член любого *E* -ряда действительно может быть

поставлен в соответствие с первым членом некоторого M -ряда. Благодаря теории Галуа, Уайлс сумел сделать первый шаг индукции. Следующий шаг требовал от Уайлса найти способ доказать, что если какой-то один член E -ряда поставлен в соответствие соответствующему члену M -ряда, то и следующий элемент E -ряда должен соответствовать следующему элементу M -ряда.

На преодоление первого этапа, Уайлсу понадобилось два года, и у него не было ни малейшего понятия о том, сколько времени потребуется, чтобы продолжить доказательство. Уайлс хорошо сознавал, какую проблему ему предстоит решить: «Вы можете спросить, как я мог неограниченно тратить время на проблему, которая могла просто оказаться неразрешимой. Ответ заключается в том, что мне очень нравилось работать над ней, я был очень увлечен. Мне нравилось испытывать свой разум. Кроме того, я знал, что та математика, с помощью которой я намеревался атаковать гипотезу Таниямы-Шимуры, позволит получить какой-нибудь интересный результат, даже если ее окажется недостаточно для доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры. Я не собирался заниматься безнадежным делом, у меня на вооружении была заведомо превосходная математика. Разумеется, существовала ненулевая вероятность того, что я так и не сумею найти доказательство Великой теоремы Ферма, но я никогда не думал, что напрасно трачу время».

«Доказана ли Великая теорема Ферма?»

Был сделан лишь первый шаг на пути к доказательству гипотезы Таниямы-Шимуры, но избранная Уайлсом стратегия была блестящим математическим прорывом, результатом, который заслуживал публикации. Но в силу обета молчания, наложенного Уайлсом самим на себя, он не мог поведать о полученном результате остальному миру и не имел ни малейшего представления о том, кто еще мог совершить столь же значительный прорыв.

Уайлс вспоминает о своем философском отношении к любому потенциальному сопернику: «Никто не захочет затратить годы на доказательство чего-то и обнаружить, что кому-то другому удалось найти доказательство несколькими неделями раньше. Но, как ни странно, поскольку я пытался решить проблему, которая по существу считалась неразрешимой, я не очень опасался соперников. Я просто не надеялся, что мне или кому-нибудь другому придет в голову идея, которая приведет к доказательству».

8 марта 1988 года Уайлс испытал шок, увидев на первых полосах газет набранные крупным шрифтом заголовки, гласившие: «Великая теорема Ферма доказана». Газеты «Washington Post» и «New York Times» сообщали, что тридцативосьмилетний Иоичи Мияока из токийского Метрополитен университета решил самую трудную математическую проблему в мире. Пока Мияока еще не опубликовал свое доказательство, но в общих чертах изложил его ход на семинаре в Институте Макса Планка по математике в Бонне. Дон Цагир, присутствовавший на докладе Мияоки, выразил оптимизм математического сообщества в следующих словах: «Представленное Мияокой доказательство необычайно интересно, и некоторые математики полагают, что оно с высокой вероятностью окажется правильным. Полной уверенности еще нет, но пока доказательство выглядит весьма обнадеживающим».

Выступая с докладом на семинаре в Бонне, Мияока рассказал о своем подходе к решению проблемы, которую он рассматривал с совершенно иной, алгебро-геометрической, точки зрения. За последние десятилетия геометры достигли глубокого и тонкого понимания математических объектов, в частности, свойств поверхностей. В 70-е годы российский математик С. Аракелов попытался установить параллели между проблемами алгебраической геометрии и проблемами теории чисел. Это было одно из направлений программы Ленглендса, и математики надеялись, что нерешенные проблемы теории чисел удастся решить, изучая соответствующие проблемы геометрии, которые также еще оставались нерешенными[18]. Такая программа была известна под названием философии параллелизма[19].

[18] Работы С. Ю. Аракелова не имеют отношения к программе Ленглендса. — *Прим. ред*

Те алгебраические геометры, которые пытались решать проблемы теории чисел, получили название «арифметических алгебраических геометров». В 1983 году они возвестили о своей первой значительной победе, когда Герд Фалтингс из Принстонского Института высших исследований внес существенный вклад в понимание теоремы Ферма[20]. Напомним, что, по утверждению Ферма, уравнение

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n}$$

при n бóльших 2 не имеет решений в целых числах. Фалтингс решил, что ему удалось продвинуться в доказательстве Великой теоремы Ферма с помощью изучения геометрических поверхностей, связанных с различными значениями n. Поверхности, связанные с уравнениями Ферма при различных значениях n, отличаются друг от друга, но обладают одним общим свойством — у них всех имеются сквозные отверстия, или, попросту говоря, дыры. Эти поверхности четырехмерны, как и графики модулярных форм. Двумерные сечения двух поверхностей представлены на рис. 23. Поверхности, связанные с уравнением Ферма, выглядят аналогично. Чем больше значение n в уравнении, тем больше дыр в соответствующей поверхности.

Рис. 23. Эти две поверхности получены с использованием компьютерной программы «Mathematica». Каждая из них представляет геометрическое место точек удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$ (для поверхности слева n =3, для поверхности справа n =5). Переменные x и y здесь считаются комплексными

Фалтингсу удалось доказать, что, поскольку такие поверхности всегда имеют несколько дыр, связанное с ними уравнение Ферма могло бы иметь лишь конечное множество решений в целых числах. Число решений могло быть любым — от нуля, как предполагал Ферма, до миллиона или миллиарда. Таким образом, Фалтингс не доказал Великую теорему Ферма, но по крайней мере сумел отвергнуть возможность существования у уравнения Ферма бесконечно многих решений.

Пятью годами позже Мияока сообщил, что ему удалось продвинуться еще на один шаг. Ему тогда было двадцать с небольшим лет. Мияока сформулировал гипотезу относительно некоторого неравенства. Стало ясно, что доказательство его геометрической гипотезы означало бы доказательство того, что число решений уравнения Ферма не просто конечно, а равно нулю[21]. Подход Мияоки был аналогичен подходу Уайлса в том, что они оба пытались доказать Великую теорему Ферма, связывая ее с фундаментальной гипотезой в другой области математики. У Мияоки это была алгебраическая геометрия, для Уайлса путь к

---

19 Здесь имеется в виду аналогия между теорией чисел и теорией функций, восходящая к Л. Кронекеру, и особенно развитая в работах Д. Гильберта. — *Прим. ред.*

20 Отметим, что Г. Фалтингс не занимался специально теоремой Ферма. О работе Г. Фалтингса и предшествующих исследованиях см. *Паршин А. Н., Зархин Ю. Г.* Проблемы конечности в диофантовой геометрии. – В кн.: *Ленг С.* Диофантова геометрия. – М.: Мир, 1986. С. 369–438. — *Прим. ред.*

21 Эти утверждения неверны. Для случая алгебраических поверхностей неравенство Мияоки было им же доказано (обобщая предшествующее неравенство Ф. А. Богомолова). То, что арифметический аналог неравенства Мияоки влечет теорему Ферма было показано А. Н. Паршиным. Более подробно см. *Паршин А. Н.* Дополнение редактора к книге «Алгебра и теория чисел (с приложениями)». – М.: Мир, 1987. С. 267–271. — *Прим. ред.*

доказательству лежал через эллиптические кривые и модулярные формы. К великому огорчению Уайлса, он все еще бился над доказательством гипотезы Таниямы-Шимуры, когда Мияока заявил о том, что располагает полным доказательством собственной гипотезы и, следовательно, Великой теоремы Ферма.

Через две недели после своего выступления в Бонне Мияока опубликовал пять страниц вычислений, составлявших суть его доказательства, и началась тщательнейшая проверка. Специалисты по теории чисел и алгебраической геометрии во всех странах мира изучали, строка за строкой, опубликованные вычисления. Через несколько дней математики обнаружили в доказательстве одно противоречие, которое не могло не вызывать беспокойства. Одна из частей работы Мияоки приводила к утверждению из теории чисел, из которого, при переводе на язык алгебраической геометрии, получалось утверждение, противоречившее результату, полученному несколькими годами раньше. И хотя это не обязательно обесценивало все доказательство Мияоки, обнаруженное противоречие не вписывалось в философию параллелизма между теорией чисел и геометрией.

Еще через две недели Герд Фалтингс, проложивший путь Мияоке, объявил о том, что обнаружил точную причину кажущегося нарушения параллелизма — пробел в рассуждениях. Японский математик был геометром и при переводе своих идей на менее знакомую территорию теории чисел не был абсолютно строг. Армия специалистов по теории чисел предприняла отчаянные усилия залатать прореху в доказательстве Мияоки, но тщетно. Через два месяца после того, как Мияока заявил о том, что располагает полным доказательством Великой теоремы Ферма, математическое сообщество пришло к единодушному заключению: доказательство Мияоки обречено на провал.

Как и в случае прежних несостоявшихся доказательств, Мияоке удалось получить немало интересных результатов. Отдельные фрагменты его доказательства заслуживали внимания как весьма остроумные приложения геометрии к теории чисел, и в последующие годы другие математики воспользовались ими для доказательства некоторых теорем, но доказать Великую теорему Ферма этим путем не удалось никому.

Шумиха по поводу Великой теоремы Ферма вскоре утихла, и газеты поместили краткие заметки, в которых говорилось, что трехсотлетняя головоломка по-прежнему остается нерешенной. На стене станции нью-йоркской подземки на Восьмой стрит появилась следующая надпись, несомненно, вдохновленная публикациями в прессе по поводу Великой теоремы Ферма: «Уравнение $xn + yn = zn$ не имеет решений. Я нашел поистине удивительное доказательство этого факта, но не могу записать его здесь, так как пришел мой поезд».

В потемках

Уайлс, о котором мир тогда еще ничего не знал, с облегчением вздохнул. Великая теорема Ферма по-прежнему оставалась непобежденной, и он мог продолжать сражаться с ней, надеясь доказать ее с помощью гипотезы Таниямы-Шимуры. «Много времени я проводил за письменным столом. Иногда мне удавалось свести общую проблему к чему-нибудь весьма конкретному — то это был многообещающий замысел, который мог привести к доказательству, то какая-нибудь деталь, показавшаяся мне странной, то статья, в которой я не мог разобраться. Если мне в голову приходила какая-нибудь идея, которая неотступно преследовала меня настолько, что я не мог ни писать, ни читать, ни думать о чем-нибудь другом, то я отправлялся на прогулку к озеру. Я обнаружил, что, гуляя, могу полностью сосредоточиться на каком-нибудь очень конкретном аспекте проблемы, абстрагируясь от всего остального. У меня с собой всегда был наготове листок бумаги и карандаш, и если мне в голову приходила какая-нибудь идея, то я всегда мог сесть на скамейку и немедля записать ее».

Через три года непрекращающихся усилий, Уайлсу удалось совершить ряд прорывов. Он применил к эллиптическим кривым группы Галуа, рассматривая «образы» этих кривых в

пространствах над арифметикой вычетов по модулю степени простого числа. Тем самым, ему удалось сделать первый шаг рассуждения по индукции. Уайлс опрокинул первое домино и теперь пытался найти метод, который мог бы помочь опрокинуть все остальные домино. На первый взгляд могло бы показаться, что это — естественный путь к доказательству, но для того, чтобы преодолеть пройденную часть пути, от Уайлса потребовалась необычайная решимость, чтобы не поддаться сомнениям в периоды неуверенности в себе.

Уайлс сравнивает математическое исследование с блужданием впотьмах в незнакомом доме. «Вы входите в первую комнату. Темно. Кромешная тьма. Вы то и дело натыкаетесь на мебель, но постепенно узнаете, где что стоит. Наконец, месяцев через шесть или около того, вы нащупываете выключатель, и внезапно становится светло. Вы отчетливо видите, где вы. Затем вы переходите в следующую комнату и проводите там шесть месяцев впотьмах. Так же обстоит дело и с прорывами в решении проблемы. Иногда озарения происходят мгновенно, иногда в течение одного-двух дней. Но в любом случае, они являются кульминацией предшествующих им многомесячных блужданий впотьмах. Без таких блужданий никаких озарений просто не было бы».

В 1990 году Уайлс оказался в самой темной из комнат. На ее обследование у него ушло почти два года. Перепробовав все известные к тому времени методы и подходы, о которых говорилось в опубликованных работах, Уайлс обнаружил, что все они не годятся для решения его проблемы. «Я был убежден, что стою на правильном пути, хотя это отнюдь не означало, что мне непременно удастся достичь поставленной цели. Методы, необходимые для решения интересовавшей меня проблемы, могли оказаться лежащими за пределами современной математики. Могло случиться и так, что методы, необходимые мне для завершения доказательства, будут созданы лет через сто. Одним словом, даже если я был на правильном пути, вполне могло оказаться, что я живу не в том столетии».

Уайлс не пал духом и упорно продолжал работать над проблемой и весь следующий год. Он начал изучать подход, известный под названием «теория Ивасавы». Эта теория представляла собой метод анализа эллиптических кривых, который Уайлс изучал в свои аспирантские годы в Кембридже под руководством Джона Коутса. Хотя теория Ивасавы в своем первоначальном виде была неприменима к интересовавшей Уайлса проблеме, но он надеялся, что ему удастся нужным образом модифицировать ее.

После начального прорыва с помощью групп Галуа Уайлс стал испытывать все большее разочарование. Когда спасительный выход из создавшегося затруднения казался особенно далеким, Уайлс черпал силы из общения с семьей. С тех пор, как он начал работу над доказательством Великой теоремы Ферма в 1986 году, у него родилось двое детей. «Я отдыхал только в кругу моих детей. Маленькие дети просто ничего не знают о Великой теореме Ферма, она им не интересна, они просто хотят услышать от вас сказку и не дадут вам заниматься ничем другим».

Метод Колывагина-Флаха

К лету 1991 года Уайлс проиграл сражение: теорию Ивасавы не удалось приспособить к решению проблемы. Он снова обратился к научным журналам и монографиям, но все же не смог найти альтернативный метод, который позволил бы ему осуществить необходимый прорыв. Последние пять лет Уайлс жил в Принстоне как отшельник, но теперь он решил, что настало время вернуться в круговорот научной жизни и познакомиться с последними математическими слухами. Возможно, кто-нибудь где-нибудь работает над каким-нибудь новым методом, который по тем или иным причинам не был опубликован. Уайлс отправился в Бостон, чтобы принять участие в конференции по эллиптическим кривым, где он надеялся встретить основных действующих лиц современного этапа развития этой теории.

Коллеги со всех концов мира были рады приветствовать Уайлса после столь долгого отсутствия (напомним, что Уайлс по собственной воле воздерживался от участия в непрекращающейся череде конференций, семинаров и симпозиумов). Никто из них не

подозревал, что Уайлс работает над доказательством Великой теоремы Ферма, а Уайлс тщательно соблюдал конспирацию и не выдал себя ни единым словом. Участники конференции не подозревали об истинных мотивах его интереса, когда он расспрашивал их о последних новостях относительно эллиптических кривых. Первоначально расспросы не давали ничего существенного, но встреча Уайлса с его бывшим научным руководителем Джоном Коутсом оказалась весьма плодотворной: «В беседе со мной Коутс упомянул о том, что один из его аспирантов по имени Матиус Флах пишет прекрасную статью, в которой анализирует эллиптические кривые. Свою работу Флах основывал на методе, недавно предложенном Колывагиным. Метод Колывагина был словно специально придуман для моей проблемы. Казалось, это было именно то, что мне нужно, хотя по собственному опыту я уже знал, что так называемый метод Колывагина-Флаха придется усовершенствовать. Я полностью отложил в сторону старый подход и стал день и ночь работать над усовершенствованием этого метода».

Профессор Колывагин и Матиус Флах разработали необычайно мощный математический метод, но ни тот, ни другой не поняли, что Уайлс вознамерился использовать их метод при решении самой трудной проблемы в мире.

Уайлс вернулся в Принстон и вскоре снова приступил к доказательству гипотезы Таниямы-Шимуры. Вскоре ему удалось доказать эффективность придуманного им доказательства по индукции для одной конкретной эллиптической кривой. К сожалению, он пока не мог доказать, что метод Колывагина-Флаха, прекрасно работавший для одной конкретной эллиптической кривой, применим к другой кривой. И тут Уайлс понял, что все эллиптические кривые подразделяются на различные семейства. Если метод Колывагина-Флаха модифицировать так, чтобы он стал эффективным для одной кривой, то он будет применим и ко всем эллиптическим кривым того же семейства. Задача сводилась к тому, чтобы приспособить метод Колывагина-Флаха к каждому из семейств эллиптических кривых. И хотя для некоторых семейств модифицировать метод Колывагина-Флаха оказалось труднее, чем для других, Уайлс был уверен, что постепенно сумеет преодолеть все трудности.

Наконец, после шести лет упорного труда, Уайлс увидел свет в конце туннеля. Неделя за неделей он продвигался вперед, доказывая, что все новые и более обширные семейства эллиптических кривых должны быть модулярными. Казалось, что долгожданная победа была лишь вопросом времени. На заключительной стадии доказательства Уайлс смог по достоинству оценить, что все его доказательство опирается на использование метода, который он открыл для себя всего лишь несколько месяцев назад. Теперь Уайлса начал интересовать вопрос, вполне ли строго он использовал метод Колывагина-Флаха.

> «В тот год я очень упорно работал, пытаясь усовершенствовать метод Колывагина-Флаха, но оказалось, что этот метод сопряжен с необычайно тонкой техникой, которой я по-настоящему не владел. Было необходимо проделать колоссальный объем довольно трудных вычислений, для выполнения которых мне нужно было выучить много нового.
>
> В начале января 1993 года я решил, что мне необходимо довериться кому-нибудь, кто разбирается в той геометрической технике, которую я изобрел для расчетов. Эксперта я выбирал очень тщательно: ведь мне предстояло доверить ему свою тайну, и я должен был быть уверен в том, что он не разгласит ее. Я решил рассказать обо всем Нику Катцу».

Профессор Ник Катц также работал на математическом факультете Принстонского университета и знал Уайлса несколько лет. Несмотря на их близкое соседство, Катц никогда не интересовался тем, что происходило буквально в том же коридоре. Он в мельчайших деталях помнит тот момент, когда Уайлс открыл ему свою тайну: «Однажды Эндрю заглянул ко мне на чай и попросил меня зайти к нему в кабинет. Ему хотелось обсудить со мной

кое-что. Я не имел представления, о чем пойдет речь, но отправился к нему в кабинет. Когда мы вошли, Эндрю запер дверь на ключ и сообщил мне, что, как ему кажется, он может доказать гипотезу Таниямы-Шимуры… Я был просто вне себя от изумления, настолько фантастически звучало его заявление.

Уайлс пояснил, что в значительной части своего доказательства он использовал разработанное им обобщение метода Колывагина-Флаха. Именно эта часть вызывала у него наибольшие сомнения, и он хотел просмотреть ее вместе с кем-нибудь, чтобы убедиться, что все в ней правильно. По мнению Уайлса, я был тем человеком, который мог бы помочь ему проверить сомнительную часть, но мне показалось, что он попросил меня по другой причине. Уайлс был уверен, что я буду держать язык за зубами и ничего не расскажу другим о его работе». После шести лет, проведенных в добровольной изоляции, Уайлс открыл свою тайну. Теперь Катцу предстояло преодолеть внушительную гору вычислений, выполненных Уайлсом. Все, что сделал Уайлс, было открытием, и Катцу пришлось основательно подумать над тем, как лучше осуществить проверку: «То, что собирался объяснить мне Уайлс, было необычайно велико по объему. Не стоило и пытаться изложить все за одну неформальную беседу в его кабинете. Для работы столь большого объема был необходим цикл еженедельных лекций, в противном случае было бы невозможно разобраться в сути дела. И мы решили устроить такой курс лекций».

Уайлс и Катц пришли к мнению, что оптимальной стратегией был бы курс лекций для аспирантов математического факультета. Уайлс должен был читать лекции, а Катц быть одним из слушателей. Курс должен был охватить ту часть доказательства, которая нуждалась в проверке, но аспирантам об этом не было известно. Изящность такого способа проверки доказательства заключалась в том, что Уайлс получал возможность шаг за шагом объяснить весь ход своих рассуждений, не вызвав никаких подозрений на факультете. Для всех остальных это был еще один курс для аспирантов.

«Итак, Эндрю объявил курс лекций под названием "Вычисления по поводу эллиптических кривых", — вспоминает Катц с лукавой улыбкой. — Название было вполне безобидным и могло означать что угодно. Уайлс ни словом не обмолвился ни о Ферма, ни о Танияме и Шимуре, а сразу углубился в технические вычисления. Ни за что на свете нельзя было догадаться, о чем в действительности шла речь. Вычисления он проводил так, что если вы не знали, ради чего все делалось, то вычисления казались невероятно сложными и техническими. А если вы не знаете, для чего вычисления, то проследить за ними невозможно. Более того, следить за сложными выкладками трудно даже в том случае, когда вам известно, куда они ведут. Как бы то ни было, аспиранты один за одним переставали ходить на лекции, и через несколько недель я остался единственным слушателем в аудитории».

Катц сидел в аудитории и внимательно следил за каждым шагом в вычислениях Уайлса. Прослушав курс, Катц пришел к заключению, что метод Колывагина-Флаха работает превосходно. Никто из остальных сотрудников математического факультета не подозревал о том, что происходит. Никто и не думал, что Уайлс может в самом ближайшем времени заявить о своих притязаниях на самый важный приз в математике. План Уайлса и Катца удался на славу.

По завершении курса лекций Уайлс сосредоточил все свои усилия на завершении доказательства. Он успешно применял метод Колывагина-Флаха к одному семейству эллиптических кривых за другим, и на этой стадии только одно семейство оставалось неприступным. Уайлс описывает, как он пытался восполнить последний элемент доказательства: «Однажды утром в конце мая Нада гуляла с детьми, а я сидел за письменным столом и размышлял о последнем семействе эллиптических кривых. Я просматривал статью Барри Мазура, как вдруг мое внимание привлекла одна фраза. В ней упоминалась некая конструкция XIX века, и я внезапно понял, что мне нужно применить эту конструкцию, чтобы методом Колывагина-Флаха можно было воспользоваться и в случае последнего

семейства эллиптических кривых. Я продолжал обдумывать мелькнувшую идею и после полудня и даже забыл спуститься к ленчу. Часам к трем-четырем дня я окончательно убедился в том, что мне удалось решить последнюю оставшуюся проблему. Время близилось к чаепитию. Я спустился вниз, очень удивив Наду столь большим опозданием. "Я доказал Великую теорему Ферма", — сказал я в свое оправдание».

Лекция века

После семи лет работы в одиночку Уайлс наконец завершил доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры и считал, что его мечта — доказать Великую теорему Ферма — почти исполнилась.

> «Итак, к маю 1993 года я пребывал в убеждении, что Великая теорема Ферма в моих руках, — вспоминает Уайлс. — Мне хотелось еще раз проверить доказательство, а в конце июня в Кембридже должна была состояться конференция, и я подумал, что лучшего места для того, чтобы сообщить о моем доказательстве, не найти, ведь Кембридж — мой родной город, и я учился там в аспирантуре».

Конференция проводилась в Институте сэра Исаака Ньютона. На этот раз Институт планировал провести симпозиум по теории чисел под не совсем ясным названием «*L* -функции и арифметика». Одним из организаторов конференции был бывший научный руководитель Уайлса Джон Коутс: «Мы собрали людей со всего земного шара, работавших над этим обширным кругом проблем, и, разумеется, Эндрю, был среди приглашенных. Мы планировали чтение усиленного курса лекций в течение недели, и первоначально, из-за недостатка времени, отводимого на лекции, я предоставил Эндрю возможность прочитать две лекции. Но когда выяснилось, что ему необходима третья лекция, я отдал ему свое время. Мне было известно, что Эндрю получил какой-то крупный результат, хотя я не имел представления, о чем идет речь».

Уайлс прибыл в Кембридж за две с половиной недели до начала его лекций, и он хотел как можно лучше использовать предоставившиеся возможности: «Я решил проверить доказательство, особенно ту ее часть, которая использует метод Колывагина-Флаха, с помощью одного-двух экспертов. Первым, кому я дал доказательство на проверку, был Барри Мазур. Насколько мне помнится, я сказал ему: "У меня с собой есть рукопись с доказательством одной теоремы." Барри очень удивился, но я настаивал: "Пожалуйста, посмотрите, все ли в порядке". Какое-то время ушло у него на то, чтобы бегло просмотреть рукопись. Барри был изумлен. Я сообщил, что буду говорить об этой теореме в своих лекциях и что мне действительно хотелось, чтобы он проверил, все ли в порядке».

Один за другим в Институт Ньютона начали прибывать самые выдающиеся специалисты. Среди участников конференции был и Кен Рибет, чьи вычисления в 1986 году вдохновили Уайлса на семилетние поиски. Он вспоминает: «Я прибыл на конференцию по *L* -функциям и эллиптическим кривым. Все шло как обычно, пока не начали распространяться самые причудливые слухи о лекциях, которые должен был прочитать Эндрю Уайлс. Согласно этим слухам, Уайлсу удалось доказать Великую теорему Ферма. Я думал, что все это чепуха. Не верил в то, что такое возможно. Было множество случаев, когда в математике начинали циркулировать слухи, особенно по электронной почте. Как показывает опыт, доверять таким слухам не стоит. Между тем слухи на конференции не прекращались. Эндрю отказывался отвечать на вопросы и вообще вел себя странно. Коутс спросил у него без обиняков: "Эндрю, что Вы доказали? Может быть, нам нужно созвать пресс-конференцию?" Эндрю только покачал головой и промолчал. Он готовился разыграть спектакль по всем правилам.

Однажды Эндрю подошел ко мне и принялся расспрашивать о том, что я сделал в 1986 году, и о каких-то деталях истории с идеями Фрея. Я еще подумал про себя, что он вряд

ли доказал гипотезу Таниямы-Шимуры и Великую теорему Ферма, иначе он не стал бы расспрашивать меня об этом. Я не стал напрямую спрашивать Уайлса о том, верны ли слухи, потому, что вел он себя очень хитро, и было понятно, что честного ответа я не получу. Поэтому я ограничился тем, что заметил: "Эндрю, если Вы собираетесь говорить об этой своей работе, то знайте, что вокруг нее происходит следующее". Я смотрел на Уайлса так, как если бы мне было что-то известно, но в действительности я не знал, что происходит. Я терялся в догадках».

Реакция Уайлса на слухи и все возраставшее давление была простой: «Меня спрашивают о моих лекциях, что именно я собираюсь рассказать на них. Я отвечаю, что если это интересно, то приходите на лекции, и вы все узнаете».

В 1920 году Давид Гильберт, которому тогда было пятьдесят восемь лет, прочитал в Гёттингене публичную лекцию на тему Великой теоремы Ферма. На вопрос о том, будет ли эта проблема когда-нибудь решена, Гильберт ответил, что на его веку это вряд ли произойдет, но более молодые слушатели, возможно, станут свидетелями ее решения. Предсказание Гильберта относительно даты, когда будет доказана Великая теорема Ферма, оказалось исключительно точным. [22] Лекции Уайлса должны были состояться очень вовремя, если вспомнить условия премии Вольфскеля. В своем завещании Пауль Вольфскель указал последнюю дату: 13 сентября 2007 года.

Серия лекций Уайлса называлась «Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Галуа». Как и название тех лекций, которые он объявил ранее в Принстоне для аспирантов, а по сути дела читал для Ника Катца, название лекций в Институте Ньютона было настолько неопределенным, что не содержало никаких указаний на истинные намерения Уайлса.

Первая лекция была, по крайней мере на первый взгляд, вполне земной. В ней закладывался фундамент атаки на гипотезу Таниямы-Шимуры, предпринятую во второй и третьей лекциях. Большинство аудитории составляли математики, ничего не знавшие о слухах. Они не оценили общую направленность лекций и обратили мало внимания на детали. Те же, кто был осведомлен о слухах, пытались обнаружить малейший намек на то, что могло бы послужить оправданием слухов.

Сразу после окончания первой лекции мельница слухов заработала с новой силой, а электронная почта разнесла новость по всему свету. Бывший аспирант Уайлса профессор Карл Рубин сообщал своему коллеге из Америки:

Дата: 21 июня 1993 13:33:06

---

[22] Констанс Рид в своей книге «Гильберт» (М., Наука, 1977) рассказывает об этом так: "Гильберт хотел привести своим слушателям характерные примеры теоретико-числовых проблем, представляющихся на первый взгляд совсем простыми, но решение которых оказывается невероятно трудным. Он упомянул в качестве такого типа проблем гипотезу Римана, теорему Ферма и проблему трансцендентности числа $2^{\&\#8730;2}$ (составляющую седьмую из его парижских проблем). Затем он продолжил, сказав, что недавно обнаружился большой прогресс, связанный с гипотезой Римана, и он очень надеется, что сам доживет до ее доказательства. Проблема Ферма стоит уже давно и явно требует совершенно новых методов для своего решения, — быть может, самому молодому слушателю в аудитории удастся дожить до ее решения. Что же касается числа $2^{\&\#8730;2}$, то ни один из присутствующих на лекции не доживет до доказательства его трансцендентности!

Две первые из упомянутых Гильбертом проблем не решены до сих пор. Однако десять лет спустя один молодой русский математик по фамилии Гельфонд установил трансцендентность числа $2^{\&\#8730;(-2)}$. Основываясь на его работе, К.Л. Зигель вскоре доказал требуемую трансцендентность числа $2^{\&\#8730;2}$.

Зигель написал Гильберту об этом доказательстве. Он напомнил ему слова, сказанные на лекции в 1920 году, и подчеркнул, что важнейшим моментом здесь была работа Гельфонда. Гильберта часто критиковали за то, что «он ведет себя так, как будто всё сделано в Гёттингене». Теперь он с крайним восторгом ответил на письмо Зигеля, даже не упомянув о достижении молодого русского математика. Он хотел опубликовать только решение Зигеля. Но тот отказался, уверенный, что Гельфонд сам, в конце концов, решит и эту проблему тоже. Гильберт сразу потерял всякий интерес к этому делу". Цитата хоть и великовата, но показывает, что предсказания Гильберта не всегда бывали "исключительно точны". :) — E.G.A.

Тема: Уайлс

Привет. Уайлс прочитал сегодня свою первую лекцию. Он не объявил о доказательстве гипотезы Таниямы-Шимуры, но движется в этом направлении, и ему предстоит прочитать еще две лекции. Окончательный результат Уайлс по-прежнему хранит в тайне.

Карл Рубин

Университет штата Огайо

На следующий день слух распространился среди более широкого круга людей, и на вторую лекцию народу пришло гораздо больше. Уайлс, поддразнивая собравшихся, привел промежуточное вычисление, из которого было ясно видно, что он пытается доказать гипотезу Таниямы-Шимуры, но аудитория продолжала гадать, достаточно ли ему удалось продвинуться для того, чтобы доказать гипотезу Таниямы-Шимуры и, как следствие, Великую теорему Ферма. Поступила новая порция электронной почты.

Дата: 22 июня 1993 13:10:39

Тема: Уайлс

Вторая лекция не принесла новых деталей. Как я и предполагал вчера, Эндрю сформулировал общую теорему о подъеме представлений Галуа вдоль линий. Насколько можно судить, теорема не применима ко всем эллиптическим кривым. Ясность наступит завтра. Мне не известно, почему Уайлс так поступает. Ясно, что он прекрасно осведомлен о том, о чем собирается рассказать завтра. В любом случае, это колоссальная по объему работа, которую он проделал за несколько лет, и Уайлс уверен в правильности полученного результата. О том, что произойдет завтра, извещу особо.

Карл Рубин

Университет штата Огайо

«23 июня Эндрю начал свою третью, и последнюю, лекцию, — вспоминает Джон Коутс. — Самое замечательное было то, что практически все, кто так или иначе внес свою лепту в его доказательство, находились в аудитории: Мазур, Рибет, Колывагин и многие-многие другие». К этому моменту слухи стали настолько определенными, что все математическое сообщество Кембриджа собралось на последнюю лекцию. Те, кому повезло, набились в аудиторию. Остальные толпились в коридоре, откуда, стоя на цыпочках, пытались заглянуть через окно в зал. Кен Рибет позаботился о том, чтобы не пропустить ни слова из самого важного в XX веке сообщения на математическую тему: «Я пришел сравнительно рано и сел в первом ряду вместе с Барри Мазуром. Чтобы запечатлеть историческое событие, я прихватил с собой камеру. Атмосфера была накалена, и люди были возбуждены. У нас действительно было такое ощущение, что мы присутствуем при историческом моменте. И до, и во время доклада с лиц не сходили иронические улыбки. За несколько дней напряжение возросло невероятно. Наконец-то настал момент, когда мы вплотную приблизились к доказательству Великой теоремы Ферма».

У Барри Мазура уже был экземпляр доказательства, переданный ему Уайлсом, но даже он был поражен тем, как талантливо был исполнен сценарий. «Мне никогда не приходилось слышать столь замечательного доклада, полного блестящих идей, с таким драматическим сюжетом и в таком блистательном исполнении. Каждый очередной шаг с необходимостью следовал из предыдущего».

После семи лет титанических усилий Уайлс был готов объявить о полученном доказательстве всему миру. Интересно отметить, что Уайлс не может вспомнить во всех подробностях заключительные моменты своего доклада. «Хотя пресса уже прослышала о докладе, к счастью, журналистов в аудитории не было. Но к концу доклада многие присутствовавшие в аудитории принялись щелкать фотоаппаратами, и появился директор Института с бутылкой шампанского в руках. Особая почтительная тишина наступила в аудитории, когда я кончил читать доклад и, повернувшись к доске, написал формулировку

Великой теоремы Ферма. "Думаю, на этом мне следует остановиться", — произнес я, и тогда после небольшой паузы раздались аплодисменты».

Математика после доказательства Великой теоремы Ферма

Как ни странно, сам Уайлс испытывал по отношению к своему докладу смешанные чувства: «Случай для выступления был выбран весьма удачно, но сама лекция вызвала у меня смешанные чувства. Работа над доказательством Великой теоремы Ферма была неотъемлемой частью моей жизни на протяжении семи лет; вся моя деятельность была сосредоточена на этом доказательстве. Я с головой ушел в проблему и чувствовал, что она моя, а теперь мне нужно было все оставить. У меня было такое чувство, будто оставляю часть самого себя». Коллега Уайлса Кен Рибет не испытывал подобной растерянности: «Событие было совершенно замечательное. Представьте себе. Вы отправляетесь на конференцию. Там, как всегда, часть докладов самых заурядных, часть хороших, несколько просто замечательных, но только один раз в жизни вам посчастливится попасть на доклад, автор которого утверждает, что ему удалось решить проблему, простоявшую 350 лет. Те, кто был в аудитории, смотрели друг на друга и говорили: "Великий Боже! Мы присутствуем при историческом событии". Присутствовавшие задали докладчику несколько вопросов технического характера относительно доказательства и возможных приложений его к другим уравнениям, и наступила тишина, взорвавшаяся второй волной аплодисментов. Следующим должен был выступить ваш покорный слуга. Я прочитал свой доклад, сидевшие в аудитории коллеги что-то записывали в блокнотах, мне аплодировали, но никто, в том числе и я сам, не мог бы сказать, о чем, собственно, был мой доклад».

Пока математики занимались распространением сенсации по электронной почте, весь остальной мир должен был ждать вечерних новостей в телепрограммах или сообщений в утренних газетах. Бригады телевизионщиков и научные обозреватели газет высадили десант в Институт Ньютона, и все как один непременно хотели взять интервью у «величайшего математика XX века». Газета «Guardian» восклицала: «Последняя загадка математики разгадана!» Заголовок на первой полосе французской газеты «Le Mond» гласил: «Теорема Ферма, наконец, доказана». Журналисты повсюду расспрашивали математиков, пытаясь узнать их профессиональное мнение о работе Уайлса, и почтенные профессора, еще не успевшие прийти в себя от пережитого шока, должны были кратко объяснять непосвященным суть сложнейшего математического доказательства или пытаться доступно изложить, в чем состоит гипотеза Таниямы-Шимуры.

Сразу после лекции Уайлса газеты всего мира разнесли весть о найденном им доказательстве Великой теореме Ферма

Профессор Шимура впервые узнал о том, что его гипотеза доказана, читая первую полосу газеты «New York Times»: «Наконец-то можно крикнуть "Эврика!". Вековая тайна математики раскрыта». Через тридцать пять лет после того, как друг профессора Шимуры Ютака Танияма совершил самоубийство, созданная ими гипотеза обрела доказательство. Для многих математиков-профессионалов доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры было несравненно важнее доказательства Великой теоремы Ферма, поскольку из этой гипотезы следует немало важных утверждений. Что же касается журналистов, то они всячески расцвечивали историю Великой теоремы Ферма и упоминали о гипотезе Таниямы-Шимуры вскользь, если упоминали вообще.

Шимура, скромнейший и обаятельный человек, не был чрезмерно обеспокоен недостатком внимания к его роли в доказательстве Великой теоремы Ферма, но тем не менее заботился о том, чтобы ни Танияма, ни сам Шимура «не превратились из существительных в прилагательных». «Весьма интересно, что люди пишут о гипотезе Таниямы-Шимуры, но

никто не пишет о Танияме и Шимуре».

С тех пор, как Иоичи Мияока в 1988 году возвестил о своем так называемом доказательстве Великой теоремы Ферма, математика впервые вышла на первые полосы газет. Различие состояло лишь в том, что теперь о доказательстве писали вдвое больше, и никто не сомневался в правильности вычислений. За один вечер Уайлс стал знаменитым, в действительности самым знаменитым, математиком мира, а журнал «People» даже причислил его к «25 самым выдающимся людям года» наряду с принцессой Дианой и Опрой Уинфри. Своеобразным показателем его известности можно считать просьбу от международной компании по производству одежды принять участие в рекламе новых моделей мужской одежды.

Пока в печати продолжалась шумиха, и математики оставались в центре всеобщего внимания, началась серьезная работа по проверке доказательства. Как и в других областях науки, каждый фрагмент доказательства должен быть тщательно изучен прежде, чем доказательство может быть признано строгим и точным. Уайлс предстал перед не знающим снисхождения судом присяжных. И хотя из докладов Уайлса в Институте Ньютона мир узнал об общем ходе доказательства, для скрупулезного анализа этого было недостаточно. По существующему в ученом мире порядку, математик представляет законченную рукопись в какой-нибудь респектабельный журнал, редактор которого передает рукопись рецензентам. В их задачу входит тщательное — строка за строкой — изучение поступившей работы. Уайлс провел беспокойное лето в ожидании беспристрастных отзывов рецензентов, надеясь, что ему удастся получить их одобрение.

Глава 7. Небольшая проблема

В задачах тех ищи удачи,
Где получить рискуешь сдачи.
Пит Хейн

Едва Уайлс закончил свою лекцию в Кембридже, как комиссию Вольфскеля известили о том, что Великая теорема Ферма, наконец, доказана. Премия не могла быть вручена немедленно, так как, по правилам конкурса, ясным и четким, требовались подтверждение правильности доказательства со стороны других математиков и официальная публикация доказательства. Королевское научное общество в Гёттингене в свое время официально уведомило всех о том, что «к рассмотрению допускаются только математические мемуары, представленные в виде статей в периодических изданиях или имеющиеся в книжных лавках… Премия присуждается Обществом не ранее, чем через два года после опубликования мемуара, удостоенного премии. Двухлетний промежуток времени необходим для того, чтобы немецкие и иностранные математики имели возможность высказать свое мнение по поводу опубликованного решения».

Уайлс направил свою рукопись в редакцию журнала «Inventiones Mathematical», после чего редактор журнала Барри Мазур приступил к подбору рецензентов. В своей работе Уайлс использовал различные методы, как старые, чтобы не сказать древние, так и современные, и Мазур, в порядке исключения, решил привлечь к рецензированию работы Уайлса не двух-трех экспертов, как обычно, а шестерых. Каждый год математические журналы всего мира публикуют около тридцати тысяч статей, но огромный объем и значимость рукописи Уайлса требовали, чтобы и рецензирование ее производилось на необычайно высоком уровне. Для упрощения работы все доказательство, занимавшее 200 страниц, было разделено на шесть частей, и на каждого рецензента возлагалась ответственность за одну из этих частей-глав.

Рецензирование главы 3 было поручено Нику Катцу, которому в том году уже приходилось изучать эту часть доказательства Уайлса: «Летом я отправился поработать в

Парижский институт высших исследований (IHES) и захватил с собой полное 200-страничное доказательство — моя глава занимала семьдесят страниц. Прибыв в Париж, я решил, что мне понадобится серьезная техническая помощь, и я настоял, чтобы Люк Иллюзи, который также находился в то время в Париже, разделил со мной обязанности рецензента. Все лето мы с Люком встречались по несколько раз в неделю — главным образом, для того, чтобы читать друг другу лекции и пытаться совместными усилиями до конца разобраться в этой главе. Все, что мы делали, сводилось к тщательному, строка за строкой, прочтению рукописи для того, чтобы убедиться, что никаких ошибок в доказательстве нет. Иногда мы заходили в тупик — это бывало раз или два раза в день, и тогда я отправлял Эндрю вопрос по электронной почте примерно такого содержания: "Я не понимаю, что Вы пишете на странице такой-то". Или: "Мне кажется, что в строке такой-то у Вас ошибка". Как правило, я получал ответ в тот же день или на другой день, недоразумение выяснялось, и мы с Люком переходили к следующей проблеме».

Доказательство представляло собой гигантскую цепочку рассуждений, весьма хитроумно выстроенных из сотен математических вычислений, склеенных воедино логическими связями. Если всего лишь одно вычисление оказалось бы ошибочным, или одно звено разорвалось, то все доказательство могло бы обесцениться. Уайлс, вернувшийся в Принстон, с беспокойством ждал, когда рецензенты завершат свою работу. «Мне не хотелось праздновать победу до тех пор, пока проверка не будет закончена. Я занимался, в основном, ответами на вопросы, которые получал по электронной почте от рецензентов. У меня была уверенность, что ни один из этих вопросов не доставит мне особых хлопот». Прежде чем предоставить доказательство референтам, Уайлс проверил и перепроверил его сам, и поэтому был уверен, что те вряд ли сумеют обнаружить в его рукописи что-нибудь, кроме математического эквивалента грамматических ошибок или опечаток — тривиальных ошибок, которые он сможет легко исправить.

«Вопросы возникали вплоть до августа, — вспоминает Катц, — пока я не наткнулся на нечто, показавшееся еще одной небольшой проблемой. Где-то около 23 августа я отправил Эндрю запрос по электронной почте. Проблема оказалась несколько более сложной, поэтому ответ Эндрю прислал по факсу. Меня этот ответ не удовлетворил, поэтому я еще раз направил Эндрю запрос по электронной почте и получил еще один ответ по факсу, который меня также не удовлетворил».

Уайлс поначалу предполагал, что очередная ошибка столь же несерьезна, как и предыдущие, но настойчивость Катца вынудила отнестись к ней серьезнее: «Я не мог немедленно ответить на заданный мне вопрос, который выглядел вполне невинно. Мне казалось, что вопрос того же порядка, что и другие, но где-то в сентябре я начал понимать, что речь шла не о какой-то незначительной трудности, а о фундаментальном пробеле. Это была ошибка в решающей части рассуждения, связанного с использованием метода Колывагина-Флаха, но настолько тонкая, что я заметил ее только после того, как мне ее указали. Описать, в чем суть ошибки в простых терминах невозможно: для этого она слишком абстрактна. Даже для того, чтобы объяснить ее математику, от последнего потребовалась бы готовность затратить два-три месяца для тщательного изучения рукописи с доказательством».

По существу, проблема сводилась к тому, что метод Колывагина-Флаха мог не сработать так, как было необходимо Уайлсу. Предполагалось, что доказательство, полученное для первых элементов E -рядов эллиптических кривых, и M -рядов модулярных форм, допускает обобщение на все элементы E - и M -рядов, что и позволяло применять принцип математической индукции. Первоначально метод Колывагина-Флаха был применим только при определенных ограничительных условиях, но Уайлс полагал, что ему удалось усилить метод настолько, что тот удовлетворял всем необходимым требованиям. По словам Катца, в действительности это было не так, и последствия были драматическими и опустошительными. Обнаруженная ошибка не обязательно означала, что доказательство Уайлса нельзя спасти, но одно было несомненно: Уайлсу было необходимо восполнить

существенный пробел в доказательстве. Абсолютизм математики требовал, чтобы Уайлс дал не оставляющее ни малейших сомнений доказательство того, что предложенный им метод применим к каждому элементу любого E -ряда и любого M -ряда.

Мелкий ремонт ковров

Когда Катц осознал всю важность обнаруженной им ошибки, он стал размышлять о том, почему ошибка была пропущена им весной, когда Уайлс читал ему лекции с единственной целью — выявить возможные ошибки. «Я полагаю, ответ заключается в следующем. Когда вы слушаете чью-нибудь лекцию, перед вами возникает довольно трудный выбор: понять все до мельчайших деталей или предоставить лектору излагать материал так, как было им задумано. Если вы станете перебивать лектора на каждом слове (я не понял это, не понял то), то ему никогда не удастся объяснить все, что он хотел, и вы ничего не достигнете. С другой стороны, если вы не будете прерывать лектора, то вы скоро не сможете следить за ходом рассуждений и будете лишь кивать головой из вежливости, но совершенно утратите понимание деталей. Каждый, кто слушает лекцию, стоит перед выбором — задавать ли слишком много вопросов или слишком мало вопросов. По-видимому, к концу лекций, в том месте, где проскользнула обнаруженная впоследствии ошибка, я предпочел задавать слишком мало вопросов».

Всего лишь несколькими неделями раньше газеты всего земного шара называли Уайлса самым блестящим математиком на Земле, и специалисты по теории чисел после 350 лет разочарования уверовали в то, что им удалось, наконец, одержать верх над Пьером де Ферма. Теперь же Уайлс должен был сделать унизительное признание в том, что в своем доказательстве он допустил ошибку. Но прежде, чем признавать ошибку, Уайлс решил собраться с духом и попытаться восполнить пробел. «Я не мог так просто сдаться. Проблема захватила все мои помыслы, и я все еще верил, что стоит лишь еще немного поразмыслить над методом Колывагина-Флаха, как все получится. Нужно лишь немного модифицировать метод, и он великолепно заработает. Я решил вернуться к своему старому образу жизни и полностью отказаться от контактов с внешним миром. Мне было необходимо всецело сосредоточиться на проблеме, но на этот раз при гораздо более трудных обстоятельствах. Долгое время я полагал, что спасительная идея где-то рядом, что мне не достает чего-то простого и что не сегодня-завтра все встанет на свое место. Разумеется, так вполне могло случиться, но по мере того, как шло время, я видел, что проблема становится все более сложной».

Жена Уайлса, наблюдавшая за его напряженной работой все семь лет, которые ушли на первоначальный вариант доказательства, теперь стала свидетельницей того, как ее муж из последних сил пытается бороться с ошибкой, которая грозит разрушить все. Уайлс вспоминает ее оптимизм: «В сентябре Нада сказала мне, что единственный подарок, который она хотела бы получить на день рождения — это правильное доказательство. Ее день рождения — шестое октября. У меня оставались две недели, но исправить ошибку я так и не сумел».

Для Ника Катца это также был напряженный период: «К октябрю об ошибке знали только я сам, Иллюзи, рецензенты остальных глав и Эндрю. Этим круг осведомленных исчерпывался. Я придерживался того мнения, что рецензент должен хранить тайну. По моему глубокому убеждению, мне не следовало обсуждать возникшую проблему с кем-нибудь помимо Эндрю, и о том, что мне было известно, я не проронил ни слова. Думаю, что внешне Эндрю выглядел нормально, но в том, что касалось представленного им доказательства, он хранил от всего мира тайну. Я полагаю, что он чувствовал себя весьма неуютно. Эндрю все надеялся, что через день-другой ему удастся преодолеть обнаруженный пробел, но время шло, а исправленный вариант рукописи в редакцию все не поступал. Пошли слухи, что с доказательством Уайлса возникла какая-то проблема».

Другой рецензент, Кен Рибет, вспоминает, что хранить тайну становилось все труднее:

«По какой-то чисто случайной причине меня стали называть "службой информации по теореме Ферма". В "New York Times" появилась статья, в которой среди прочего говорилось: "Рибет, который выступает в роли пресс-атташе при Эндрю Уайлсе…" — или что-то в этом роде. После этой публикации я стал магнитом для всех, кто так или иначе интересуется Великой теоремой Ферма как изнутри, так и извне математического сообщества. Журналисты со всех концов света обрывали мои телефоны, и за два-три месяца мне пришлось неоднократно выступать с лекциями о доказательстве Великой теоремы Ферма. В своих лекциях я подчеркивал, каким великим достижением было представленное Уайлсом доказательство, излагал общий ход доказательства, рассказывал более подробно те его части, которые знал лучше всего, но слушатели довольно скоро начинали терять терпение и начинали задавать неприятные вопросы…

Уайлс заявил во всеуслышание о том, что ему удалось доказать Великую теорему Ферма, но никто, кроме узкой группы рецензентов, не видел рукописи с изложением доказательства. Математики были исполнены ожидания: Эндрю обещал представить рукопись через несколько недель после своего выступления в июне. Люди говорили: "Ну хорошо, о доказательстве теоремы заявлено. Но как ему удалось ее доказать? Почему нам ничего не сообщают?" Математики испытывали легкое беспокойство по поводу того, что их держали в неведении, и они просто хотели знать, в чем дело. Затем ситуация ухудшилась: над доказательством стали сгущаться тучи, и коллеги приходили и делились со мной слухами о том, что в главе 3 обнаружен пробел. Им хотелось знать, что мне известно по этому поводу, а я не знал, что им сказать».

Поскольку Уайлс и рецензенты отрицали, что им что-либо известно о пробеле в доказательстве, или вовсе отказывались от комментариев на эту тему, стали множиться самые дикие слухи. Математики обменивались по электронной почте самыми невероятными догадками в надежде докопаться до сути дела.

> Дата: 18 нояб 1993 21:04:49
> Тема: Пробел в доказательстве Уайлса
> Циркулирует множество слухов об одном или нескольких пробелах в доказательстве Уайлса. Но что означает пробел — небольшую трещину, расщелину, расселину, ущелье или бездну? Располагает ли кто-нибудь надежной информацией?
> Джозеф Липман
> Университет Пурду

В чайной комнате любого математического факультета слухи вокруг доказательства Уайлса росли с каждым днем. Некоторые математики пытались успокоить математическое сообщество:

> Дата: 19 нояб 1993 15:42:20
> Тема: Ответ на вопрос: пробел в доказательстве Уайлса?
> Не располагаю никакой информацией из первых рук и не беру на себя смелость обсуждать информацию, полученную из вторых рук. Полагаю, что в подобной ситуации лучше всего сохранять спокойствие и предоставить компетентным рецензентам, которые тщательно изучают доказательство Уайлса, выполнять свой долг. О том, что им удастся обнаружить, рецензенты сообщат, когда у них будет, что сообщить. Всякий, кому приходилось писать или рецензировать статью, знает, как часто в процессе проверки доказательств возникают различные вопросы. Было бы удивительно, если бы они не возникли в связи со столь важным результатом и таким длинным доказательством.
> Леонард Эванс
> Северо-Западный университет

Несмотря на призывы к спокойствию, дебаты по электронной почте становились все

напряженнее.

Дата: 24 нояб 93 12:00:34

Тема: Новые слухи о теореме Ферма

Я не согласен с теми, кто утверждает, будто мы не должны распускать слухи по поводу того, есть ли пробел в предложенном Уайлсом доказательстве великой теоремы Ферма. Я благосклонно отношусь к подобным слухам, если их не принимать чересчур серьезно, и не вижу в этом ничего плохого. В частности, независимо от того, есть ли ошибка в доказательстве Уайлса или нет, я считаю, что он создал великолепную математику высочайшего класса.

А вот что мне известно на сегодня из *n* -ых рук…

Боб Сильверман

Дата: 22 нояб 93 20:16

Тема: Пробел в доказательстве теоремы Ферма

Выступая на прошлой неделе с лекцией в Институте Ньютона, Коутс заявил, что, по его мнению, в «геометрических системах Эйлера», составляющих важную часть доказательства, имеется пробел, на ликвидацию которого «может потребоваться от недели до двух лет». Я разговаривал с Уайлсом несколько раз, но все еще не уверен в том, что ему удалось доказать великую теорему Ферма: у Уайлса нет ни одного экземпляра рукописи.

Насколько мне известно, единственный экземпляр доказательства в Кембридже имеется только у Ричарда Тейлора — одного из рецензентов журнала «Inventiones», и он упорно отказывается комментировать доказательство до тех пор, пока все рецензенты не придут к единому заключению. Поэтому ситуация не проясняется. Сам я не знаю, насколько авторитетным можно считать мнение Коутса на этой стадии. Я намереваюсь ждать известий от Ричарда Тейлора.

Ричард Пинч

Ажиотаж вокруг неуловимого доказательства усиливался, но Уайлс упорно держался в стороне от дебатов и игнорировал всякие измышления. «Я был очень далек от всего этого, поскольку не желал знать, что говорят обо мне. Я вел уединенный образ жизни, но периодически встречался с моим коллегой Питером Сарнаком, который сообщал мне: "Знаете, там разыгралась настоящая буря!" Я выслушивал его, но не предпринимал ни малейших попыток внести ясность, так как полностью сосредоточился на проблеме».

Питер Сарнак стал сотрудником математического факультета Принстонского университета в то же время, что и Уайлс, и за прошедшие годы они успели стать близкими друзьями. В период кипения страстей, последовавший за лекциями Уайлса в Институте Ньютона, Сарнак был одним из тех немногих, с кем Уайлс поддерживал доверительные отношения. «Я не знал подробностей, но понимал, что Уайлс пытается восполнить серьезный пробел. Всякий раз, когда ему удавалось исправить какую-то часть своих вычислений, какая-нибудь другая трудность возникала в другой части доказательства. Дело обстояло так, будто Уайлс пытается расстелить в комнате ковер, который больше комнаты: стоило Эндрю добиться, чтобы расстелить ковер ровно в одном углу, как в другом углу тотчас же возникали складки. Но расстелить ковер так, чтобы он лег без складок по всей комнате, Уайлсу никак не удавалось. Не следует забывать, что Эндрю сделал гигантский шаг вперед. Никому до него не удавалось предложить никакого подхода к доказательству гипотезы Таниямы-Шимуры, а Уайлс продемонстрировал нам так много свежих идей, что все пришли в неописуемый восторг. Еще бы! Его идеи были новы, фундаментальны, и никто ранее не высказывал ничего подобного. И если пробел в его доказательстве не удалось бы восполнить, то и тогда огромный прогресс был бы налицо — но, разумеется, Великая теорема Ферма осталась бы нерешенной».

В конце концов Уайлс почувствовал, что не может молчать вечно. Исправление

ошибки оказалось далеко не простым делом, и настало время положить конец домыслам. И после гнетущих неудач, преследовавших его всю осень, Уайлс направил по электронной почте в редакцию математического бюллетеня следующее сообщение:

> Дата: 4 дек 93 01:36:50
>
> Тема: В каком состоянии доказательство Великой теоремы Ферма
>
> Имея в виду различные домыслы по поводу моей работы над гипотезой Таниямы-Шимуры и Великой теоремой Ферма, сообщаю кратко о той ситуации, которая сложилась на самом деле. В ходе рецензирования моей работы возник ряд проблем, большинство из которых были успешно решены, но одну проблему мне так и не удалось решить. Игравшая ключевую роль редукция (большинства случаев) гипотезы Таниямы-Шимуры к вычислению группы Сельмера правильна. Однако заключительные вычисления точной верхней грани для группы Сельмера в полуустойчивом случае (симметричного квадратичного представления, ассоциированного с модулярной формой) в том виде, в котором они существуют на данный момент, неполны. Я уверен, что мне удастся в ближайшее время восполнить пробел, используя те идеи, которые были изложены в моих кембриджских докладах.
>
> Большой объем работы, который еще предстоит проделать над рукописью, не позволяют мне издать ее в виде препринта. Полностью доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры будет изложено в моих лекциях, которые я собираюсь прочитать в Принстоне в феврале.
>
> Эндрю Уайлс

Оптимизм Уайлса убедил немногих. Прошло почти шесть месяцев, а ошибка так и не была исправлена, и не было никаких причин ожидать каких-либо изменений в ближайшие шесть месяцев. Во всяком случае, если бы Уайлс действительно рассчитывал «в ближайшее время восполнить пробел», то зачем ему было беспокоиться и отправлять сообщение по электронной почте? Продолжал бы себе хранить молчание еще несколько недель, а потом взял бы и выпустил законченную рукопись. Февральский курс лекций, о котором Уайлс упомянул в своем сообщении, разосланном по электронной почте, не содержал обещанной детали, и математическое сообщество заподозрило, что Уайлс просто пытается выиграть время.

О происходящем пронюхали газеты и напомнили математикам о провалившейся сенсации 1986 года с доказательством Великой теоремы Ферма Мияокой. История повторялась. Специалисты по теории чисел теперь ожидали очередного послания по электронной почте с сообщением о том, что в доказательстве обнаружен невосполнимый пробел. Некоторые математики выразили сомнение в том, что доказательство будет получено за лето, и теперь их пессимизм казался вполне оправданным. Рассказывают, будто профессор Алан Бейкер из Кембриджского университета предложил заключить пари на сто бутылок против одной, что в течение года доказательство Уайлса не будет исправлено. Бейкер отрицает эту историю, но гордо заявляет о том, что выражал «здоровый скептицизм».

Менее чем через шесть месяцев после выступления в Институте Ньютона доказательство Уайлса было повержено в прах. Удовольствие, которое Уайлс получал от работы над доказательством в тайне от всех, когда им двигала страсть и надежда, сменились разочарованием и отчаянием. Уайлс вспоминает о том, как мечта его детства превратилась в кошмар: «Первые семь лет моей работы над проблемой я наслаждался противоборством с труднейшей задачей один на один. Какой бы трудной она ни была, сколь бы непреодолимыми ни казались препятствия, я занимался решением любимой задачи. Она была страстью моего детства, я просто не мог отделаться от нее, не мог оставить ни на миг. Затем мне пришлось говорить о Великой теореме Ферма публично — и это вызвало у меня чувство потери. Я испытывал смешанные чувства. Было чудесно видеть, как другие люди реагируют на доказательство, как приводимые аргументы полностью изменяют все направление математики, но в то же время проблема утратила для меня «личное» обаяние.

Теперь проблема была открыта всему миру, и я лишился возможности приватно размышлять над ней. И когда с доказательством возникли трудности, десятки, сотни, тысячи людей жаждали отвлечь меня от дела. Заниматься математикой на виду у всего мира не в моем вкусе, и публичная работа над исправлением доказательства не доставляла мне ни малейшего удовольствия».

Специалисты по теории чисел во всем мире сочувствовали Уайлсу, оказавшемуся в весьма затруднительном положении. Кен Рибет сам пережил подобный кошмар восемью годами раньше, когда пытался доказать существование связи между гипотезой Таниямы-Шимуры и Великой теоремой Ферма. «Я выступал с докладом о доказательстве в Институте математических исследований в Беркли, и кто-то из присутствовавших спросил: «Минутку, а откуда Вам известно, что то-то и то-то правильно?» Я немедленно ответил, объяснив свое рассуждение, но мне возразили, сославшись на то, что приведенные мной доводы в данном случае не применимы. Меня охватил панический страх. Я покрылся холодным потом и почувствовал себя весьма неуютно. Затем мне пришло в голову, как можно было бы доказать свою правоту: единственная возможность состояла в том, чтобы обратиться к какой-нибудь фундаментальной работе по данному вопросу и посмотреть, как автор поступает в аналогичной ситуации. Я заглянул в соответствующую работу и убедился в том, что мой метод действительно применим в рассматриваемом случае, и через день-другой все встало на место. В следующей лекции я смог привести обоснование того места в предыдущей лекции, которое вызвало сомнение. Но невозможно было избавиться от страха, что стоит объявить о чем-то важном, как сразу же обнаружится какая-нибудь фундаментальная ошибка.

Если вы обнаружили в рукописи ошибку, то дальнейшие события могут развиваться по двум сценариям. Иногда вас не покидает уверенность в том, что в основном все сделано правильно и доказательство может быть легко исправлено. Иногда возникает противоположная ситуация. У вас появляется весьма тревожное губительное чувство, когда вы осознаете, что допустили фундаментальную ошибку, исправить которую невозможно. Бывает и так, что обнаруженная в доказательстве прореха становится настолько широкой, что теорема полностью распадается, и чем больше вы пытаетесь залатать отверстие, тем сильнее увязаете. Но в доказательстве Уайлса каждая глава сама по себе была значительным математическим исследованием. Рукопись явилась результатом семилетней работы и, по сути, представляла собой несколько важных статей, сшитых в единое целое, и каждая из этих статей представляла огромный интерес. Ошибка вкралась только в одну из этих статей — в главу 3, но даже если изъять главу 3, то остальная часть работы Уайлса просто великолепна».

Но без главы 3 не было доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры и, следовательно, доказательства Великой теоремы Ферма. Математическое сообщество переживало глубокое разочарование: доказательство двух великих проблем было в опасности. Кроме того, за шесть месяцев ожидания никто, кроме Уайлса и рецензентов, так и не получил доступа к рукописи. Все громче раздавались призывы к большей открытости, чтобы каждый желающий мог сам увидеть детали ошибок. Высказывалась надежда на то, что кому-нибудь, возможно, удастся обнаружить то, что ускользнуло от Уайлса, и восполнить пробел в доказательстве. Некоторые математики утверждали, что доказательство Уайлса представляет слишком большую ценность, чтобы оставлять его в руках одного человека. Специалисты по теории чисел стали мишенью насмешек со стороны остальных математиков, которые саркастически осведомлялись у них, знают ли они вообще что-либо о предложенном доказательстве. То, что должно было стать моментом величайшего торжества и гордости в истории математики, превратилось в предмет насмешек.

Но, несмотря ни на что, Уайлс отказывался публиковать свою рукопись. После семи лет упорных усилий, ему вовсе не улыбалось отойти от проблемы и наблюдать, как кто-то другой завершит доказательство и похитит его славу. Победителем станет не тот, кто проделал большую часть работы, а тот, кто сделает заключительный шаг и даст миру законченное доказательство. Уайлс знал, что если рукопись будет опубликована с ошибкой в

доказательстве, то он немедленно будет погребен под ворохом вопросов и просьб пояснить ту или иную деталь, и это окончательно отвлечет его от дела и разрушит надежды на то, что ему самому удастся исправить доказательство.

Уайлс попытался вернуться в то состояние изоляции, которое позволило ему создать первоначальный вариант доказательства. Он возобновил интенсивные занятия в кабинете на мансарде своего дома. Время от времени он, как в добрые старые времена, совершал пешие прогулки к озеру. Но теперь любители бега трусцой, велосипедисты и гребцы, которые прежде приветствовали его коротким взмахом руки, останавливались и спрашивали, удалось ли продвинуться в восполнении пробела. Портреты Уайлса появились на первых полосах газет, статья о нем была напечатана в журнале «People», интервью с Уайлсом передавалось по CNN. И хотя за прошедшее лето Уайлс стал математической знаменитостью мирового масштаба, его имидж уже померк.

Между тем по математическому факультету Принстона продолжали циркулировать слухи. Профессор Джон Конвей вспоминает атмосферу, царившую тогда в чайной комнате математического факультета: «В три часа мы собирались на чай и налегали на булочки. Иногда мы обсуждали математические проблемы, иногда — суд над О. Дж. Симпсоном, иногда судачили о том, как продвигалась работа у Эндрю. Поскольку никому из нас и в голову не приходило пойти и спросить у него, как идут дела с доказательством, мы вели себя, как кремлинологи. Кто-нибудь заявлял: "Сегодня утром я встретил Эндрю". "Он улыбался?" — спрашивал другой коллега. "Улыбался, но вид у него был не слишком радостный". О том, как продвигается исправление доказательства, мы могли судить только по выражению лица Эндрю».

Кошмарное сообщение по электронной почте

Зима вступила в свои права. Надежды на прорыв окончательно угасали, и все больше математиков высказывали мнение, что Уайлс должен опубликовать рукопись. Слухи не стихали, и в одной из газетных статей появилось сообщение о том, будто Уайлс отказался от попыток восполнить пробел в своем доказательстве и признал, что оно обладает неисправимым дефектом. И хотя автор заметки заведомо преувеличил, не подлежало сомнению, что Уайлс испробовал несколько вариантов в надежде исправить замеченную ошибку и пока не видел новых возможных путей, ведущих к решению.

Уайлс признался Питеру Сарнаку, что ситуация становится отчаянной и он готов признать поражение. Сарнак был склонен думать, что трудности Уайлса отчасти обусловлены его одиночеством: у Уайлса не было надежного человека, с которым он мог бы «перебрасываться» идеями, который вдохновлял бы Уайлса исследовать не столь прямые подходы. Сарнак посоветовал Уайлсу довериться кому-нибудь и попытаться еще раз восполнить пробел. Уайлсу был необходим специалист, свободно владеющий методом Колывагина-Флаха и способный, к тому же, хранить тайну. По зрелом размышлении Уайлс решил пригласить к себе в Принстон для совместной работы Ричарда Тейлора, ученого из Кембриджского университета.

Тейлор был одним из рецензентов, проверявших доказательство. Кроме того, он был бывшим аспирантом Уайлса, поэтому Уайлс питал к нему двойное доверие. В прошлом году Тейлор присутствовал на лекции Уайлса в Институте сэра Исаака Ньютона. Теперь ему предстояло помочь в спасении доказательства, которое оказалось небезупречным.

В январе Уайлс с помощью Тейлора снова без устали исследовал метод Колывагина-Флаха, пытаясь найти выход из создавшегося затруднения. Иногда, после нескольких дней упорнейших усилий, Уайлс и Тейлор вступали на новую территорию, но неизбежно возвращались к исходному пункту. Проникая все дальше и дальше вглубь

неизвестной территории и возвращаясь каждый раз туда, откуда они выходили, Уайлс и Тейлор осознали, что находятся в самом центре невообразимо огромного лабиринта. Больше всего они боялись, что этот лабиринт бесконечен, что из него нет выхода и они обречены бесцельно блуждать до скончания времени.

Весной 1994 года, когда казалось, что ситуация не может быть хуже, на экраны компьютеров всего мира поступило следующее сообщение по электронной почте:

> Дата: 03 апр 1994
>
> Тема: Снова великая теорема Ферма!
>
> Сегодня в доказательстве великой теоремы Ферма произошел поистине поразительный сдвиг. Наум Элькис заявил, что располагает контрпримером. Таким образом, великая теорема Ферма оказалась неверной! Элькис выступил с сообщением о контрпримере сегодня в Институте. Построенное им решение уравнения Ферма имеет невероятно большую простую степень (больше, чем 1020), тем не менее оно представляет собой разновидность точечной конструкции Хенгера в комбинации с весьма остроумным вариантом метода спуска для перехода от модулярных кривых к кривой Ферма. Самая трудная часть задачи заключается в том, чтобы показать, что область определения решения (которая априори есть некоторое поле классов колец мнимого квадратичного поля) действительно допускает спуск на Q.
>
> Я не смог проследить за всеми деталями, которые были весьма сложными… Таким образом, есть основания полагать, что гипотеза Таниямы-Шимуры все-таки неверна. По мнению экспертов, гипотезу все еще можно спасти, обобщая понятие автоморфного представления и вводя понятие «аномальных кривых», которое приведет к «квазиавтоморфному представлению».
>
> Анри Дарман
>
> Принстонский университет

Наум Элькис, профессор Гарвардского университета, в 1988 году обнаружил контрпример к гипотезе Эйлера. Теперь Элькис, по-видимому, нашел контрпример, опровергающий Великую теорему Ферма. Для Уайлса это был весьма чувствительный удар: причина, по которой ему никак не удавалось исправить доказательство заключалась в том, что так называемая ошибка была прямым следствием ложности Великой теоремы Ферма. Для математического сообщества в целом удар был еще сильнее, так как если Великая теорема Ферма неверна, то, как показал Фрей, это привело бы к эллиптической кривой, которой не соответствует никакая модулярная форма, а это прямо противоречит гипотезе Таниямы-Шимуры. Тем самым, можно было утверждать, что Элькис нашел не только контрпример Великой теореме Ферма, но и к гипотезе Таниямы-Шимуры.

Кончина гипотезы Таниямы-Шимуры имела бы разрушительные последствия для всей теории чисел, поскольку на протяжении двух десятилетий математики молчаливо предполагали, что гипотеза Таниямы-Шимуры верна. В главе 5 мы упоминали о том, что математики опубликовали десятки доказательств различных теорем, начинавшихся со слов: «Предположим, что гипотеза Таниямы-Шимуры верна…», но если Элькис доказал, что это предположение неверно, это означало бы, что все опиравшиеся на него теоремы рухнули. Математики немедленно стали требовать более подробной информации и забросали Элькиса вопросами, но ответов и разъяснений не последовало. Никаких подробностей относительно якобы построенного им контрпримера никому разузнать не удалось.

Через день или два всеобщей сумятицы некоторые математики взглянули на сообщения о контрпримере Элькиса еще раз и поняли, что, хотя сообщение было датировано 2 или 3 апреля, объяснялось это тем, что электронная почта была получена из вторых или третьих рук. Первоначально сообщение было датировано 1 апреля: сообщение было шуткой канадского специалиста по теории чисел Анри Дармана. Розыгрыш стал уроком для тех, кто распространял слухи о Великой теореме Ферма, и на какое-то время Великую теорему Ферма, Уайлса, Тейлора и доказательство с вкравшейся ошибкой оставили в покое.

В то лето Уайлсу и Тейлору не удалось продвинуться ни на шаг. После восьми лет непрестанных усилий — несмотря на то, что поиск доказательства стал делом его жизни, Уайлс был на грани того, чтобы признать свое поражение. Он сообщил Тейлору, что не видит смысла продолжать их совместные усилия по исправлению доказательства. Тейлор к тому времени уже принял решение провести сентябрь в Принстоне прежде, чем возвращаться в Кембридж, и поэтому, несмотря на то, что Уайлс пал духом, Тейлор предложил поработать над проблемой еще месяц. Если к концу сентября выяснится, что никаких признаков успеха нет, они публично признают поражение и опубликуют доказательство в том виде, в каком оно есть, чтобы предоставить другим возможность найти и исправить вкравшуюся ошибку.

Подарок ко дню рождения

Хотя сражение, которое Уайлс вел с самой трудной математической проблемой мира, по-видимому, было обречено на поражение, он мог, оглянувшись на семь последних лет, утешить себя сознанием того, что все же он достиг неплохих результатов.

Если не считать заключительной части, связанной с использованием метода Колывагина-Флаха, остальная работа Уайлса сомнений не вызывала. Гипотеза Таниямы-Шимуры и Великая теорема Ферма могли оставаться недоказанными, тем не менее Уайлс обогатил математику целой серией новых методов и стратегий, которые можно было использовать для доказательства других теорем. В том, что Уайлс потерпел неудачу, не было ничего постыдного, и он начал привыкать к такому положению дел.

В качестве слабого утешения Уайлс хотел по крайней мере понять, почему он потерпел поражение. Пока Тейлор еще и еще раз подвергал тщательному анализу альтернативные методы, Уайлс решил посвятить сентябрь изучению метода Колывагина-Флаха, чтобы понять, почему он не работает. Он живо вспоминает те роковые дни: «В понедельник 19 сентября я с утра сидел у себя в кабинете, изучая метод Колывагина-Флаха. Я не надеялся на то, что мне удастся заставить его заработать, но хотел по крайней мере выяснить, почему этот метод не срабатывает. Я понимал, что хватаюсь за соломинку, но хотел до конца разобраться в причинах постигшей меня неудачи. Внезапно, совершенно неожиданно, на меня снизошло озарение. Я понял, что хотя метод Колывагина-Флаха не работал на полную мощность, в нем было все, что необходимо для возможности применения теории Ивасавы, на которую я первоначально опирался. Мне стало ясно, что от метода Колывагина-Флаха я могу взять все необходимое для того, чтобы сделать эффективным мой первоначальный подход трехлетней давности. Так из руин и пепла метода Колывагина-Флаха возникло правильное решение проблемы».

Теория Ивасавы сама по себе была недостаточна. Метод Колывагина-Флаха сам по себе также был недостаточен. Но взятые вместе, они идеально дополняли друг друга. Этот момент, когда на него снизошло прозрение, Уайлс не забудет никогда. Когда он вспоминает те мгновения, картины прошлого оживают настолько ярко, что он едва удерживает слезы: «Решение было неописуемо прекрасно, такое простое и изящное. Я никак не мог взять в толк, почему оно не приходило мне в голову раньше. Не веря самому себе, я минут двадцать молча таращился на него. На следующий день я обошел моих коллег по математическому факультету и пригласил их заглянуть ко мне в кабинет и посмотреть, все ли в порядке с найденным мной накануне решением. С решением все было в порядке. Я был вне себя от возбуждения. Это был самый важный момент за всю мою математическую карьеру. Ничто из того, что мне суждено свершить, не могло сравниться с переживаемым моментом».

Момент действительно был необычайно важным: не только исполнилась мечта детства Уайлса, не только достигнута кульминация восьми лет напряженнейшей работы, но и сам Уайлс, казалось, находившийся на грани поражения, еще раз заявил о себе как о выдающемся математике. Последние четырнадцать месяцев были особенно мучительным, унизительным и отчаянным периодом в его математической карьере. И теперь блестящее

озарение положило конец всем страданиям.

«В первый вечер я отправился домой и заснул у себя в кабинете над найденным решением. На следующее утро к 11 часам я убедился, что все в порядке. Тогда я спустился вниз и сказал жене: "Я нашел его! Думаю, что мне удалось найти его". Мое заявление прозвучало так неожиданно, что жена решила, будто я говорю о какой-то детской игрушке. Тогда я объяснил, что мне удалось исправить свое доказательство».

Первая страница доказательства теоремы Ферма, представленного Уайлсом

MODULAR ELLIPTIC CURVES AND FERMAT'S LAST THEOREM / 455

Chapter 1

This chapter is devoted to the study of certain Galois representations. In the first section we introduce and study Mazur's deformation theory and discuss various refinements of it. These refinements will be needed later to make precise the correspondence between the universal deformation rings and the Hecke rings in Chapter 2. The main results needed are Proposition 1.2 which is used to interpret various generalized cotangent spaces as Selmer groups and (1.7) which later will be used to study them. At the end of the section we relate these Selmer groups to ones used in the Bloch—Kato conjecture, but this connection is not needed for the proofs of our main results.

In the second section we extract from the results of Poitou and Tate on Galois cohomology certain general relations between Selmer groups as Σ varies, as well as between Selmer groups and their duals. The most important observation of the third section is Lemma 1.10(i) which guarantees the existence of the special primes used in Chapter 3 and [TW].

1. Deformations of Galois representations

Let *p* be an odd prime. Let Σ be a finite set of primes including *p* and let **Q** $_{\text{\&\#931;}}$ be the maximal extension of **Q** unramified outside this set and ∞. Throughout we fix an embedding of **Q** , and so also of **Q** $_{\text{\&\#931;}}$, in **C** . We will also fix a choice of decomposition group D_q for all primes *q* in **Z** . Suppose that *k* is a finite field of characteristic *p* and that

(1.1)

ρ$_0$: Gal(**Q** $_{\text{\&\#931;}}$/**Q**) → GL$_2$(*k*)

is an irreducible representation. In contrast to the introduction we will assume in the rest of the paper that ρ$_0$ comes with its field of definition *k* . Suppose further that det ρ0 is odd. In particular this implies that the smallest field of definition for ρ$_0$ is given by the field *k* 0 generated by the traces but we will not assume that *k* = *k* $_0$. It also implies that ρ0 is absolutely irreducible. We consider the deformations [ρ] to GL$_2$(*A*) of ρ$_0$ in the sense of Mazur [Ma1]. Thus if *W* (*k*) is the ring of Witt vectors of *k*, *A* is to be a complete Noetherian local *W* (*k*)-algebra with residue field *k* and maximal ideal *m* , and a deformation [ρ] is just a strict equivalence class of homomorphisms ρ: Gal(**Q** $_{\text{\&\#931;}}$/**Q**) → GL$_2$(*A*) such that ρ mod *m* = ρ$_0$, two such homomorphisms being called strictly equivalent if one can be brought to the other by conjugation by an element of ker: GL$_2$(*A*) → GL$_2$(*k*). We often simply write ρ instead of [ρ] for the equivalence class.

В следующем месяце Уайлс, наконец, смог исполнить обещание, которое ему не удалось исполнить в прошлом году. «Приближался день рождения Нады, и я вспомнил, что в прошлый раз я не смог подарить ей то, что она хотела получить в подарок. На этот раз, через полминуты после начала праздничного обеда по случаю ее дня рождения, я подарил Наде рукопись полного доказательства. Думаю, что этому подарку она была рада больше, чем

любому другому, который я когда-либо дарил ей».

Дата: 25 окт 1994 11:04:11

Тема: Последние новости о великой теореме Ферма

Этим утром поступили две рукописи: «Модулярные эллиптические кривые и великая теорема Ферма» Эндрю Уайлса и «Теоретико-кольцевые свойства некоторых алгебр Гекке» Ричарда Тейлора и Эндрю Уайлса.

Первая из них (большая) содержит среди прочего доказательство великой теоремы Ферма, использующее в одном решающем шаге вторую (малую).

Как известно большинству из вас, в доказательстве, изложенном в кембриджских докладах Уайлса, оказался серьезный пробел, а именно: построение эйлеровской системы. После безуспешных попыток исправить эту конструкцию, Уайлс обратился к другим подходам, которые он использовал раньше, но от которых отказался в пользу идеи эйлеровской системы. Уайлсу удалось восполнить пробел в своем доказательстве в предположении, что некоторые алгебры Гекке представляют собой локально полные пересечения. Эта и остальные идеи, бегло описанные в кембриджских докладах Уайлса, изложены в первой рукописи. В совместной работе Тейлор и Уайлс (вторая статья) установили необходимое свойство алгебр Гекке. Общий ход доказательства аналогичен намеченному Уайлсом в его кембриджских докладах. Новый подход гораздо проще и короче первоначального, поскольку изъята система Эйлера. (После изучения обеих работ Фалтингсу удалось еще более упростить эту часть доказательства.) Варианты представленных рукописей попали в руки небольшого числа людей (в некоторых случаях) в течение нескольких недель. И хотя разумно сохранять осторожность, основания для оптимизма заведомо имеются.

Карл Рубин

Университет штата Огайо

Глава 8. Великое Объединение в математике

Был малый не промах, а стал, как чума.
Виною всему — теорема Ферма:
Не может никак он ее доказать,
Уайлса пример не дает ему спать.
Фернандо Гувеа

На этот раз никаких сомнений в доказательстве не было. Две статьи общим объемом в 130 страниц были подвергнуты самому тщательному анализу, которому когда-либо подвергались математические рукописи за всю историю человечества, и в мае 1995 года были опубликованы в журнале «Annals of Mathematics».

Уайлс снова оказался на первой полосе «New York Times», но заголовок «Математик утверждает, что классическая проблема решена» оказался в тени заголовка другой статьи: «Новые данные о возрасте Вселенной ставят перед учеными новую космическую проблему». И хотя журналисты на этот раз проявили по отношению к Великой теореме Ферма несколько меньший энтузиазм, математики по достоинству оценили истинное значение полученного доказательства. «Для математиков окончательный вариант доказательства эквивалентен по своему значению расщеплению атома или открытию структуры ДНК, — заявил Джон Коутс. — Доказательство Великой теоремы Ферма представляет собой великий триумф человеческого интеллекта, и не следует упускать из виду, что оно единым махом совершило переворот в теории чисел. Для меня очарование и красота работы Эндрю заключается в том, что она стала гигантским шагом вперед в развитии теории алгебраических чисел».

За восемь лет упорнейшего труда Уайлс, по существу, свел воедино все достижения теории чисел XX века, выстроив из них одно сверхмощное доказательство. Преследуя свою главную цель, Уайлс попутно создавал совершенно новые доказательства и использовал их в немыслимых ранее сочетаниях с традиционными методами.

Этим Уайлс открыл новые направления для атак на множество других проблем. По словам Кена Рибета, доказательство Уайлса представляет собой идеальный синтез современной математики и служит источником вдохновения на будущее: «Я думаю, что если бы вы оказались на необитаемом острове и захватили с собой только рукопись с доказательством Уайлса, то у вас было бы предостаточно пищи для размышлений. Перед вами предстали бы все течения современной мысли в области теории чисел. На одной странице вы встретите краткое упоминание о фундаментальной теореме Делиня, на другой найдете несколько неожиданную ссылку на теорему Хеллегуарка — и все это вводится в игру и используется с тем, чтобы через мгновенье уступить место следующей идее».

Большинство журналистов превозносили на все лады найденное Уайлсом доказательство Великой теоремы Ферма, некоторые из них комментировали нераздельно связанное с ним доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры. Лишь немногие удосужились упомянуть о вкладе Ютаки Таниямы и Горо Шимуры, двух японских математиков, которые еще в 50-е годы XX века посеяли семена, предопределившие успех Уайлса. Хотя Танияма умер более тридцати лет назад, его коллега — Горо Шимура — стал свидетелем доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры. Когда его спросили о его впечатлении от доказательства, он мягко улыбнулся и сдержанно, с достоинством ответил: «Я же говорил вам».

Подобно многим своим коллегам, Кен Рибет считал, что доказательство гипотезы Таниямы-Шимуры совершило переворот в математике: «Важным психологическим отзвуком доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры явилось то, что теперь математики стали смело браться за решение проблем, которые прежде казались им неприступными. Ныне картина полностью изменилась. Теперь известно, что все эллиптические кривые модулярны, и, когда вы доказываете какую-нибудь теорему для эллиптических кривых, вы тем самым доказываете теорему относительно модулярных форм, и наоборот. У вас появляется иное видение происходящего в математике, и мысль о том, что вам придется работать с модулярными формами пугает вас меньше, поскольку вы, по существу, работаете с эллиптическими кривыми. Когда прежде приходилось писать статью об эллиптических кривых, мы вместо того, чтобы открыто признать, что нам ничего не известно, делали предположение: "Пусть гипотеза Таниямы-Шимуры доказана", — и смотрели, какие следствия проистекают из этого. Теперь нам достоверно известно, что гипотеза Таниямы-Шимуры верна, и мы смело можем утверждать, что из этого следует. Нужно ли говорить, что это гораздо приятнее».

С помощью гипотезы Таниямы-Шимуры Уайлс объединил эллиптический и модулярный миры и, тем самым, проложил математике пути ко многим другим доказательствам: проблемы, стоящие в одной области, могут быть решены по аналогии с проблемами из параллельной области. Классические нерешенные проблемы теории эллиптических кривых стало возможным подвергнуть пересмотру, используя все имеющиеся средства и методы теории модулярных форм.

Что еще более важно, Уайлс сделал первый шаг к осуществлению грандиозной программы математики Роберта Ленглендса. После успеха, достигнутого Уайлсом, стало возможно с новыми силами пытаться доказать другие гипотезы, объединяющие различные разделы математики. В марте 1996 года Уайлс разделил с Ленглендсом премию Вольфа (не путать с премией Вольфскеля) размером в 100 000 долларов. Комитет по присуждению премии Вольфа признал, что доказательство Уайлса само по себе представляет собой выдающееся достижение, к тому же оно вдохнуло жизнь в амбициозную схему Ленглендса. Уайлс совершил прорыв, который может привести математику в новый золотой век.

После года сумятицы и неопределенности математическое сообщество могло, наконец, успокоиться. На каждом симпозиуме, коллоквиуме, на любой конференции одно заседание посвящалось доказательству Уайлса, а бостонские математики даже устроили соревнование: кто из них сумеет запечатлеть памятное событие, каким, несомненно, стало доказательство Уайлса, в шутливом стихотворении. Всеобщее внимание привлекли следующие вирши-лимерик:

— Гарсон, книгу жалоб прошу я давно:
Несвежая скатерть, прокисло вино.
— Что книга! Ее я могу Вам подать,
Но узки поля, и нельзя записать,
Как Вы ни старайтесь, на них ничего.

Э.Хоув, Х.Ленстра, Д.Моултон.

Великие нерешенные проблемы

Уайлс сознавал, что, дав математике одно из величайших доказательств, он лишил ее одной из величайших загадок: «Люди говорили мне, что я отнял у них проблему, и просили дать им взамен что-нибудь еще. Математики впали в меланхолию. Мы утратили нечто такое, что было с нами на протяжении долгого времени и что многих из нас привлекло к математике. С математическими проблемами всегда так. Нам всегда необходимо находить новые проблемы, которые привлекли бы наше внимание».

Но хотя Уайлс действительно разгадал самую знаменитую математическую проблему, любителям трудных задач-головоломок не стоит терять надежду. Нерешенных проблем еще осталось превеликое множество. Многие из них, как и Великая теорема Ферма, уходят корнями в древнегреческую математику, понять их может любой школьник. Например, множество загадок и поныне связано с простыми числами. В главе 1 мы уже упоминали о том, что совершенным называется число, сумма делителей которого совпадает с самим числом. Например, 6 и 28 — совершенные числа, так как

1, 2, 3 делят 6, и 6 = 1 + 2 + 3,

1, 2, 4, 7, 14 делят 28, и 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Рене Декарт говорил, что «совершенные числа, подобно совершенным людям, встречаются весьма редко». Самое большое из известных совершенных чисел содержит в своей десятичной записи 130000 цифр и определяется по формуле

$$\mathbf{2^{216090}\cdot(2^{216091}-1)}\ .$$

Общее свойство всех известных совершенных чисел заключается в том, что они четны. Поэтому так и подмывает сказать, что все совершенные числа четны. Проблема, увы, пока не поддающаяся решению, заключается в том, чтобы доказать это утверждение.

Другая сложная проблема, связанная с совершенными числами, состоит в выяснении ответа на вопрос, можно ли исчерпать запас совершенных чисел за конечное число шагов. На протяжении веков многие математики, занимающиеся теорией чисел, пытались выяснить, конечно или бесконечно множество совершенных чисел, но всякий раз терпели неудачу. Всякому, кому удалось бы дать определенный ответ на этот вопрос, уготовано почетное место в истории математики.

Еще одна область богата древнейшими нерешенными проблемами — теория простых чисел. Последовательность простых чисел подчиняется какой-то плохо различимой закономерности, и простые числа живут по собственным правилам. Их сравнивают с сорной травой, случайным образом распределенной среди натуральных чисел. Перебирая одно за другим натуральные числа, можно набрести на области, богатые простыми числами, но, по неизвестной причине, другие области оказываются совершенно пустыми. Математики веками пытались разгадать закон, по которому распределены простые числа, и всякий раз

терпели поражение. Возможно, никакого закона не существует, и распределение простых чисел случайно по самой своей природе. В этом случае математикам можно было бы порекомендовать заняться решением менее амбициозных проблем, связанных с простыми числами.

Например, две тысячи лет назад Евклид доказал, что запас простых чисел неисчерпаем (см. гл. 2). Последние два столетия математики пытались доказать, что запас простых чисел-близнецов также неисчерпаем. Близнецами называют пары простых чисел, отличающихся на 2, т. е. являющихся ближайшими соседними простыми числами (простые числа не могут отличаться на 1, иначе одно из них должно было бы быть четным). Примерами небольших простых чисел-близнецов могут служить (5, 7), (11, 13) и (17, 19), примерами больших чисел-близнецов — (22271, 22273) и (1 000 000 000 061, 1 000 000 000 063). Существуют веские основания полагать, что множество простых чисел-близнецов бесконечно, но никому пока не удалось доказать, что это действительно так.

Самый большой прорыв к доказательству так называемой гипотезы простых чисел произошел в 1966 году, когда китайскому математику Чену Джинграну удалось показать, что существует бесконечное множество пар простых и *почти простых* чисел. У настоящих простых чисел нет делителей (отличных от самого числа и единицы), а почти простые числа уступают простым самую малость: у них существуют только два простых делителя. Например, число 17 простое, а число 21 (=3·7) — почти простое. Что же касается таких чисел, как 120 (=2·3·4·5), то они не простые и не почти простые, так как их можно представить в виде произведения нескольких простых множителей. Чен доказал, что существует бесконечно много случаев, когда простое число имеет в качестве близнеца либо другое простое число, либо почти простое число. Тот, кому удастся продвинуться еще на один шаг и снять оговорку «почти», совершит величайший прорыв в теории простых чисел со времен Евклида.

Еще одна загадка простых чисел восходит к 1742 году, когда Христиан Гольдбах, учитель малолетнего царя Петра I, написал письмо великому математику Леонарду Эйлеру (который был родом из Швейцарии, но почти всю жизнь проработал в Петербурге). Рассмотрев десятки четных чисел, Гольдбах заметил, что все они представимы в виде суммы двух простых чисел:

4 = 2 + 2,
6 = 3 + 3,
8 = 3 + 5,
10 = 5 + 5,
50 = 19 + 31,
100 = 47 + 53,
21000 = 17 + 20983,
. . . . . .

Гольдбах спрашивал у Эйлера, может ли тот доказать, что каждое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел. Несмотря на многолетние усилия, Эйлеру, которого считали «живым воплощением анализа», так и не удалось решить проблему Гольдбаха. Ныне, в век компьютеров, гипотезу Гольдбаха подвергли проверке. Оказалось, что она верна для любого четного числа до 100 000 000, но доказать, что она верна для любого из бесконечно многих четных чисел, пока никому не удалось. Математики сумели доказать, что любое четное число представимо в виде суммы не более, чем 800 000 простых чисел[23], но этот результат весьма далек от доказательства первоначальной гипотезы

[23] чересчур завышенная оценка; еще двадцать лет назад было известно, что показатель в теореме Шнирельмана не превышает 20. — E.G.A.

Гольдбаха. Но даже столь слабые результаты позволили пролить свет на природу простых чисел, и в 1941 году российскому математику Ивану Матвеевичу Виноградову, которому удалось продвинуться на пути к доказательству гипотезы Гольдбаха, была присуждена Сталинская премия в размере 100 000 рублей.

Из всех проблем, способных с большей или меньшей вероятностью занять место Великой теоремы Ферма, наибольшие шансы имеет проблема плотнейшей упаковки шаров Кеплера. В 1609 году немецкий ученый Иоганн Кеплер доказал, что планеты движутся не по круговым, а по эллиптическим орбитам. Это открытие совершило переворот в астрономии и позднее помогло Исааку Ньютону найти закон всемирного тяготения. Математическое наследие Кеплера не столь грандиозно по своим масштабам, как наследие Ньютона, но не менее глубоко. Проблему плотнейшей упаковки шаров можно сформулировать как задачу о том, как наиболее экономно сложить из апельсинов пирамиду.

Проблема родилась в 1611 году, когда Кеплер написал небольшое сочинение «О шестиугольных снежинках», предназначенное в дар его покровителю Иоганну Вакгеру фон Вакенфельсу. В этом сочинении Кеплер успешно объяснил, почему снежинки всегда имеют шестиугольную форму, высказав предположение, что рост каждой снежинки начинается с обладающего гексагональной симметрией зародыша, который, падая в атмосфере, увеличивается в размерах. Непрерывно изменяющиеся ветер, температура и влажность позволяют каждой снежинке сохранять индивидуальность, а малые размеры зародыша приводят к тому, что условия, от которых зависит его рост, остаются одинаковыми со всех шести сторон, тем самым способствуя сохранению симметрии. В этом, на первый взгляд легкомысленном, сочинении проявился присущий Кеплеру замечательный талант извлекать глубокие и далеко идущие результаты из простейших наблюдений. Впоследствии Кеплер стал одним из основоположников кристаллографии.

Интерес Кеплера к расположению и самоорганизации частиц вещества привел его к обсуждению другого вопроса — о плотнейшей упаковке частиц, при которой они занимают наименьший объем. Если предположить, что частицы имеют форму шаров, то ясно, что как бы они ни располагались в пространстве, между ними неизбежно останутся зазоры, и вопрос состоит в том, чтобы объем зазоров свести к минимуму. Кеплер рассмотрел несколько различных вариантов расположения шаров и для каждого варианта вычислил коэффициент заполнения пространства.

Один из первых вариантов расположения шаров, рассмотренных Кеплером, сейчас принято называть гранецентрированной кубической решеткой. Ее можно построить, выложив сначала нижний слой шаров так, чтобы каждый шар был окружен шестью другими шарами. Второй слой образуют шары, уложенные в «ямки» поверх первого слоя, как показано на рис. 24. По существу, второй слой повторяет первый, но только слегка смещен относительно первого, чтобы шары второго слоя расположились в ямках первого слоя. Именно так обычно укладывают апельсины торговцы фруктами. Коэффициент заполнения пространства такой укладки составляет 74 %. Это означает, что при укладке апельсинов в картонный ящик гранецентрированная стратегия позволяет заполнить 74 % объема ящика апельсинами.

Рис. 24. В гранецентрированной кубической упаковке шаров каждый слой состоит из сфер уложенных так, что каждая из них окружены шестью другими сферами. Поверх каждого слоя горизонтально накладывается следующий слой так, что любой из его шаров располагается не на шаре из предыдущего слоя, а в ямке. Частной разновидностью гранецентрированной кубической упаковки служат пирамиды из апельсинов в витринах

овощных магазинов

Гранецентрированную кубическую решетку можно сравнить с другими вариантами упаковки, например, с простой кубической решеткой. В этом случае каждый слой состоит из шаров, расположенных в виде квадратной решетки, а каждый следующий слой расположен в точности поверх предыдущего, как показано на рис. 25. Простая кубическая решетка имеет коэффициент заполнения пространства 53 %.

Рис. 25. В простой кубической упаковке каждый слой состоит из шаров расположенных в виде квадратной решетки. Поверх каждого слоя горизонтально накладывается следующий слой так, что каждый его шар располагается строго над шаром предыдущего слоя

Еще один вариант расположения шаров — гексагональная решетка — аналогичен гранецентрированной кубической решетке, поскольку каждый слой состоит из шаров, окруженных шестью другими шарами, но следующий слой не сдвинут относительно предыдущего, а расположен прямо поверх него так, что каждый шар опирается на самую верхнюю точку шара, расположенного под ним, как показано на рис. 26. У гексагональной решетки коэффициент заполнения пространства составляет всего лишь 60 %.

Рис. 26. В упаковке с гексагональной решеткой каждый слой состоит из шаров расположенных так, что каждый из них окружен шестью другими шарами. Поверх каждого слоя горизонтально накладывается следующий слой так, что каждый шар верхнего слоя располагается непосредственно над шаром предыдущего слоя

Кеплер исследовал множество различных конфигураций и пришел к заключению, что в сочинение «О шестиугольных снежинках» стоит включить только одну, а именно ту, которая в последствие получила название гранецентрированной кубической решетки, ибо у нее «упаковка оказывается плотнейшей из возможных». Утверждение Кеплера можно считать вполне разумным, так как коэффициент заполнения пространства для гранецентрированной кубической решетки наибольший из всех тех, которые были им обнаружены. Однако это не исключает возможность существования какого-то другого расположения шаров, с еще большим коэффициентом заполнения пространства, которое Кеплер попросту проглядел.

Проблема плотнейшей упаковки шаров требует от математиков доказательства того, что гранецентрированная кубическая решетка представляет собой наиболее эффективный вариант упаковки шаров. Эта проблема на полвека старше Великой теоремы Ферма и, как теперь оказалось, еще более неприступна.

Как и в случае Великой теоремы Ферма, решение проблемы Кеплера сводится к доказательству, охватывающему бесконечное множество возможных вариантов упаковки. Гипотеза Кеплера утверждает, что среди бесконечно многих вариантов расположения шаров нет ни одного такого, у которого коэффициент заполнения пространства был бы больше, чем у гранецентрированной кубической решетки. Математикам предстоит доказать, что это невозможно не только для регулярного, но и для случайного, хаотического, варианта расположения шаров.

За последние 380 лет никому не удалось доказать, что гранецентрированная кубическая решетка действительно служит оптимальной стратегией упаковки. Но никто пока не открыл более эффективного метода упаковки. Отсутствие контрпримера означает, что для всех практических целей утверждение Кеплера применимо, но в абсолютном мире математики

абсолютно необходимо строгое доказательство. Британский специалист по упаковке шаров К. А. Роджерс говорит, что «большинство математиков в правильность гипотезы Кеплера верят, а все физики в ее правильности твердо убеждены, так как это знают».

Несмотря на отсутствие полного доказательства, за прошедшие со времен Кеплера столетия было пройдено несколько вех на пути к решению. В 1892 году скандинавский математик Аксель Туэ нашел доказательство для двумерного аналога проблемы Кеплера, т. е. обнаружил наиболее эффективное расположение шаров в одном-единственном слое, или, иначе говоря, укладки апельсинов не в ящике, а на подносе. Решением оказалось гексагональное расположение шаров. Впоследствие Тот, Сегрэ и Малер пришли к тому же заключению, но ни один из использованных в двумерном случае методов не применим к исходной трехмерной проблеме Кеплера.

В наше время некоторые математики попытались подойти к проблеме Кеплера с совершенно другой стороны, а именно — вычислить верхний предел коэффициента заполнения пространства. В 1958 году К. А. Роджерс вычислил его верхний предел, который оказался равным 77,97 %. Это означает, что невозможно расположить шары так, чтобы коэффициент заполнения пространства был выше 77,97 %. Такое значение коэффициента заполнения пространства не намного больше, чем его значение для гранецентрированной кубической решетки, равное 74,04 %. Следовательно, если у какого-нибудь расположения шаров коэффициент заполнения пространства и оказался бы выше, чем у гранецентрированной кубической решетки, то превышение составило бы всего лишь несколько процентов. Оставалось узкое окно в 3,93 %, в которое могло бы «втиснуться» какое-то дикое расположение шаров, которое стало бы контрпримером, опровергающим гипотезу Кеплера. После Роджерса другие математики попытались полностью закрыть образовавшееся окно, понизив верхний предел до 74,04 %. Если бы эти попытки оказались удачными, то для других расположений не осталось бы места, они не могли бы иметь более высокий коэффициент заполнения пространства, чем гранецентрированная кубическая решетка, и тем самым гипотеза Кеплера оказалась бы «оправданной ввиду неявки подозреваемой». К сожалению, снижение верхнего предела оказалось процессом медленным и трудным, и к 1988 году верхний предел удалось уменьшить лишь до 77,84 %, что лишь незначительно улучшает оценку Роджерса.

Несмотря на столь медленный прогресс, проблема плотнейшей упаковки шаров летом 1990 года неожиданно попала в заголовки на первых полосах газет. Ву-И Хзянь из Калифорнийского университета в Беркли опубликовал результат, который, по его утверждению, был доказательством гипотезы Кеплера. Первоначально реакция математического сообщества была оптимистической, но когда работа Ву-И Хзяня подверглась тщательному рецензированию, в ней был обнаружен ряд ошибок, и доказательство рухнуло.

Как и в случае с доказательством Уайлса, Хзянь через год представил пересмотренный вариант доказательства, в котором, как он утверждал, ему удалось обойти те проблемы, которые были обнаружены в первоначальном варианте рукописи. К сожалению для Хзяня, его критики продолжали считать, что в его логике остаются пробелы. В письме к Хзяню математик Томас Хейлис попытался объяснить свои сомнения: «Одно предположение, сделанное в Вашей второй статье, представляется мне более фундаментальным и не менее трудным для доказательства, чем остальные… Ваши рассуждения весьма основательно и по существу опираются на это предположение, однако нигде нет и намека на его доказательство».

С тех пор, как Хзянь представил усовершенствованный вариант доказательства, между ним и его критиками шла непрекращающаяся борьба. Правильность предъявленного Хзянем усовершенствованного доказательства остается под вопросом. Во всяком случае, для того, кто хочет доказать гипотезу Кеплера, дверь остается открытой. В 1996 году Дуг Мудер изложил свое ви́дение ситуации вокруг доказательства Хзяня, обнаружив некую интригу:

«Недавно я вернулся с Совместной летней научно-исследовательской конференции по дискретной и вычислительной геометрии, состоявшейся в Маунт Холиоке под эгидой Американского математического общества, Института управленческих наук и Общества промышленной и прикладной математики. Такие конференции проводятся раз в десять лет, поэтому акцент делался на прогрессе, достигнутом за последние десять лет. Хзянь заявил о том, что ему удалось доказать гипотезу Кеплера шесть лет назад. Я обнаружил, что сообщество пришло к согласию по этому поводу: его доказательство "никто не покупает".

На пленарных лекциях и во время неформальных дискуссий неоднократно обсуждались следующие вопросы.

1. В статье Хзяня (опубликованной в "International Journal of Mathematics" в 1993 году) не содержится доказательства гипотезы Кеплера. В лучшем случае это набросок доказательства (на 100 страниц!), его общий ход. Таким доказательство могло бы быть.

2. Эта статья не может считаться даже наброском, так как к некоторым ее утверждениям обнаружены контрпримеры.

3. Столь же необосновано утверждение Хзяня о якобы найденном им доказательстве гипотезы о додекаэдре (и различных других ранее недоказуемых проблем упаковки шаров).

4. Работа над гипотезой Кеплера и гипотезой о додекаэдре должна продолжаться так, как если бы статьи Хзяня никогда не существовали.

В одной из лекций Габор Фейеш-Тот из венгерской Академии наук так отозвался о статье Хзяня: "Эту работу нельзя рассматривать как доказательство. Проблема по-прежнему остается открытой." Ему вторил Томас Хейлис из Мичиганского университета: "Проблема Кеплера остается нерешенной. Я не решил ее. Хзянь не решил ее. Насколько мне известно, никто не решил ее." (Хейлис предсказывал, что его собственный метод позволит решить проблему Кеплера "через год-другой".)

Самое интересное в этой истории — то, что один математик так и не присоединился к общему мнению, а именно сам Хзянь (он не был участником конференции). Хзянь был великолепно осведомлен о контрпримерах и о том, что специалисты не верят его утверждениям, но продолжал выступать с лекциями по всему миру, в которых не уставал снова повторять эти утверждения. Те математики, которым доводилось лично общаться с Хзянем (например, Хейлис и Бездек), считают, что Хзянь никогда не признавал, что в его статье имеются ошибки.

Именно по этой причине «пыль» оседала так медленно. Хзянь впервые заявил о том, что располагает доказательством гипотезы Кеплера в 1990 году, т. е. шесть лет назад. Публичные выступления Хзяня достаточно расплывчаты и неопределенны для того, чтобы быть правдоподобными. Через несколько месяцев после первых заявлений о том, что он располагает доказательством, когда появился первый препринт, в доказательстве сразу же были обнаружены пробелы, а вскоре последовали и контрпримеры. Но Хзянь упорно не прекращал лекционную деятельность, и это обстоятельство создавало впечатление, что он, по-видимому, справляется с теми возражениями, которые возникают. Объем его статьи и то, что текст доказательства претерпел несколько переработок до публикации, еще больше усиливали разноголосицу и неразбериху.

Случай с Хзянем показывает, до какой степени математики полагаются на представления о чести. Математическое сообщество исходит из предположения, что почтенные профессора из самых престижных университетов не станут делать скоропалительные, безосновательные заявления и откажутся от ошибочных утверждений, едва в них будет обнаружен пробел. Тот, кто нарушит сложившуюся систему, основанную на представлениях о профессиональной честности, породит смятение, которое будет длиться долго, так как ни у кого нет ни желания, ни времени следовать повсюду за нарушителем и опровергать его всякий раз, когда он будет высказывать ложные утверждения. (Представьте себе, какой объем работы потребовалось проделать Хейлису, чтобы написать свою разоблачительную статью, опубликованную в 1993 году на страницах журнала "Mathematical Intelligencer", и примите во внимание, что она ничего не дала для математической карьеры

самого Хейлиса, — и вы поймете эту проблему. Хзянь опубликовал ответ на статью Хейлиса, но его доводы оказались совершенно несостоятельными. Хейлис счел, что критика ответа Хзяня означала бы вхождение в нескончаемый цикл, на продолжение которого у него просто нет времени.)

Хзянь мог позволить себе не признавать своих ошибок, но как обстояло с редколлегией "International Journal"? Ясно, что члены редколлегии оказались вовлеченными в процесс, который пошел не так, как предполагалось. Статья Хзяня не была прорецензирована должным образом, если вообще была прорецензирована. Ранее «Journal» не проявлял ни малейшего интереса к проблеме плотнейшей упаковки шаров. Было ясно, что Хзянь остановил свой выбор на "International Journal" не потому, что это было подходящее периодическое издание для публикации его статьи, а потому, что этот журнал издавали его друзья.

Кароль Бездек, который больше года работал в контакте с Хзянем, пытался заполнить пробелы в его доказательстве, и представил в «Journal» статью, содержащую контрпример одной из лемм Хзяня. Публикация статьи Бездека затянулась надолго — с декабря. Столь долгий срок бывает иногда необходим для рецензирования статьи, но не совсем обычен для контрпримера к самой разрекламированной статье, опубликованной в «Journal» за многие годы».

Доказательства на чипах

В первой схватке с Великой теоремой Ферма единственным оружием Уайлса были карандаш, бумага и чистая логика. И хотя его доказательство использует самые современные методы теории чисел, оно выдержано в лучших традициях Пифагора и Евклида. Но недавно появились зловещие признаки того, что доказательство Уайлса, возможно, стало одним из последних примеров классического доказательства, и будущие доказательства столь сложных проблем будут полагаться не столько на изящные рассуждения, сколько на грубую силу.

Первые признаки того, что некоторые называют упадком математики, появились в октябре 1852 года в Англии, когда Фрэнсис Гатри, который мог уделять математике лишь часть своего времени, предложил одну, на первый взгляд, безобидную задачу. Однажды, раскрашивая от нечего делать карту графств Британии, Гатри наткнулся на головоломку, которая показалась ему простой, хотя решить ее он так и не сумел. Гатри просто хотел узнать, каково минимальное число красок необходимо взять для раскраски любой мыслимой карты при условии, чтобы никакие две смежные области (имеющие общую границу) не оказались окрашенными в один и тот же цвет.

Например, для раскрашивания карты, изображенной на рисунке, трех красок недостаточно. Следовательно, для раскрашивания некоторых карт необходимы по крайней мере четыре краски. Гатри хотел узнать, окажется ли четырех красок достаточно для раскрашивания всех карт, или для некоторых карт могут потребоваться пять, шесть или больше красок.

Разочарованный неудачей, но заинтригованный, Гатри упомянул об этой задаче в беседе со своим братом Фредериком, студентом Университетского колледжа в Лондоне. Тот, в свою очередь, рассказал о ней своему профессору, знаменитому Августу Де Моргану, который в письме от 23 октября сообщил великому ирландскому математику и физику Уильяму Роэну Гамильтону: «Мой студент попросил меня сегодня объяснить одну задачу, которая мне не была ранее известна и пока не понятна до конца. Он утверждает, что если любую фигуру разделить любым способом на части и раскрасить их различными красками так, чтобы фигуры, имеющие общий отрезок граничной линии, были окрашены в различные цвета, то всего потребуются четыре краски, но не больше. Мне известен случай, когда требуется четыре краски. Вопрос: нельзя ли придумать случай, когда необходимы пять или

более красок?.. Если Вы придумаете очень простой пример, который покажет, насколько я глуп, то, думается, мне надо будет поступить, как Сфинксу»[24].

Гамильтону не удалось придумать карту, для раскраски которой потребовалось бы пять цветов, но он не сумел и доказать, что такой карты не существует. Весть о проблеме четырех красок быстро распространилась по Европе, но, несмотря на все усилия, проблема упорно не поддавалась решению, хотя казалась простой. Герман Минковский однажды на лекции заявил, что проблема четырех красок не была решена потому, что найти решение пытались только третьеразрядные математики. Но и его собственные усилия в течение нескольких недель не увенчались успехом. «Небеса разгневались на меня за мое высокомерие, — вынужден был признать Минковский. — Мое доказательство также оказалось с изъяном».

Автор задачи о четырех красках Фрэнсис Гатри вскоре покинул Англию и отправился в Южную Африку, где занялся адвокатской деятельностью. Но в конце концов он вернулся к математике, став профессором Кейптаунского университета. Впрочем, Гатри проводил больше времени на ботаническом факультете, чем со своими коллегами-математиками. Помимо проблемы четырех красок его единственной заявкой на славу стало описание вереска, названого в его честь Erica guthriei.

Фрэнсис Гатри понял, что карту графств Британии он мог бы раскрасить всего лишь в четыре цвета, причем так, что никакие два соседних графства не оказались бы раскрашенными в один и тот же цвет. Затем он стал размышлять над тем, хватит ли четырех цветов для аналогичной раскраски любой другой карты

Проблема четырех красок оставалась нерешенной четверть века. Надежда на успех появилась в 1879 году, когда британский математик Альфред Брей Кемпе опубликовал в «American Journal of Mathematics» статью, в которой, по его утверждению, содержалось решение головоломки Гатри. Казалось, Кемпе удалось доказать, что для раскраски любой карты требуется самое большее четыре краски, и тщательное изучение доказательства вроде бы подтверждало его правильность. Кемпе был тотчас же избран членом Королевского общества, а позднее возведен в рыцарское звание за вклад в развитие математики.

Но в 1890 году лектор Дурхэмского университета Перси Джон Хивуд опубликовал работу, потрясшую математический мир. Через десять лет после того, как Кемпе, казалось бы, решил проблему четырех красок, Хивуд не оставил от его решения камня на камне, показав, где в решении Кемпе была допущена принципиальная ошибка. Единственной хорошей новостью было то, что Хивуду удалось получить оценку для максимального числа красок: оно могло быть равно четырем или пяти, но не более.

Хотя Кемпе, Хивуду и другим так и не удалось решить проблему четырех красок, их попытки внесли большой вклад в новый раздел математики — топологию. В отличие от геометрии, которая занимается изучением точной формы и размеров объекта, топологию интересуют только самые фундаментальные свойства объекта, составляющие его суть.

Например, когда геометр изучает квадрат, его интересуют такие свойства квадрата, как равная длина сторон и то, что все внутренние углы квадрата прямые. Когда же тополог изучает квадрат, его интересует только то обстоятельство, что контур квадрата представляет одну сплошную замкнутую линию, т. е. по существу — петлю. Поэтому для тополога окружность неотличима от квадрата, поскольку окружность также представляет собой одну петлю. Математик Джон Келли как-то раз заметил: «Тополог — это тот, кто не отличает бублик от кофейной чашки».

Топологическую эквивалентность квадрата и окружности можно наглядно представить

---

24 Имеется в виду древнегреческий миф о царе Эдипе. После того, как Эдип разгадал загадку, предложенную ему Сфинксом, Сфинкс бросился в пропасть со скалы.

себе и другим способом, вообразив, что квадрат или окружность начерчены на резиновом листе. Если выбрать за исходную фигуру квадрат, то, растягивая, сжимая, изгибая и перекручивая резиновый лист (но не разрывая его и не склеивая никакие точки), квадрат можно превратить в окружность. С другой стороны, квадрат невозможно превратить в крест, как бы мы ни деформировали резиновый лист. Следовательно, квадрат и крест топологически не эквивалентны. Из-за такого подхода к наглядному представлению топологических свойств фигур топологию часто называют «геометрией на резиновом листе».

Отказавшись от таких понятий, как длина и угол, топологи могут отличать объекты по таким свойствам, как число точек пересечения, которыми обладает объект. По точкам пересечения восьмерка существенно отличается от окружности, так как у восьмерки имеется точка, где пересекаются четыре линии, тогда как у окружности точек пересечения нет вообще. Сколько бы мы ни растягивали и ни изгибали восьмерку, ее невозможно превратить в окружность. Топологи занимаются также изучением трехмерных объектов (и даже объектов более высокой размерности), у которых их внимание привлекают такие фундаментальные свойства, как дыры, петли и узлы.

Математики надеялись, что рассматривая карты через упрощающие линзы топологии, они сумеют постичь самую суть проблемы четырех красок. Первый успех пришел в 1925 году, когда Филип Франклин, оставив в стороне общую проблему четырех красок, сумел доказать, что для раскрашивания любой карты, содержащей не более 25 областей, требуются только четыре краски. Другие математики попытались использовать метод Франклина, и в 1926 году Рейнольдс обобщил доказательство Франклина, сумев довести число областей до 27. В 1940 году Винн распространил доказательство на карты с 35 областями, а в 1970 году Оре и Стемпл увеличили число областей до 39. Казалось, история проблемы четырех красок повторяет историю Великой теоремы Ферма: продвижение к бесконечно многим областям происходило медленно. В правильности исходной гипотезы Гатри почти не было сомнений, но до тех пор, пока не получено доказательство для общего случая, всегда оставалась возможность, что кому-нибудь все же удастся начертить карту, которая опровергнет эту гипотезу. И, действительно, в 1975 году известный популяризатор науки и многолетний ведущий раздела «Математические игры» журнала «Scientific American» Мартин Гарднер опубликовал карту, для раскрашивания которой якобы требовались пять красок. Однако номер журнала «Scientific American» вышел 1 апреля, а Гарднер был великолепно осведомлен о том, что хотя раскрасить его карту четырьмя красками довольно трудно, но отнюдь не невозможно. Возможно, вы захотите попробовать сделать это сами. Карта, о которой идет речь, изображена на рис. 28.

Рис. 28.

Со временем становилось ясно, что традиционные подходы не позволяют преодолеть пропасть, отделяющую предложенное Оре и Стемплом доказательство для карт, содержащих не более 39 областей, от доказательства для любых карт, возможно, состоящих из бесконечно большого числа областей. И вот в 1976 году два математика из Иллинойского университета, Вольфганг Хакен и Кеннет Аппель, предложили новый метод, перевернувший традиционные представления о математическом доказательстве.

Хакен и Аппель изучили работу Генриха Хееша, утверждавшего, что из некоторого конечного числа карт, содержащих конечное число областей, можно построить бесконечное множество разнообразнейших карт. Изучение карт, составленных из таких строительных блоков, позволяет составить представление о том, как следует искать подходы к решению общей проблемы четырех красок. Основные карты можно рассматривать как эквиваленты электрона, протона и нейтрона — фундаментальных «кирпичиков», из которых построено все остальное. Хакену и Аппелю удалось свести проблему четырех красок «всего лишь» к

1482 конфигурациям, служащим теми строительными блоками, из которых можно составить любую карту. Если бы Хакен и Аппель смогли доказать, что каждый из этих строительных блоков может быть раскрашен четырьмя красками, то из этого следовало бы, что все карты также могут быть раскрашены в четыре краски.

Разумеется, проверка всех 1482 карт и перебор различных комбинаций раскраски каждой из них — задача необычайно громоздкая и трудоемкая, заведомо выходящая за рамки возможностей любой группы математиков. Даже при использовании компьютера перебор возможных вариантов мог бы затянуться на столетие. Но Хакен и Аппель не пали духом и принялись разыскивать удачные ходы и стратегии, использование которых позволило бы ускорить проверку карт и вариантов их раскрашивания. В 1975 году, через пять лет после того как они приступили к работе над проблемой четырех красок, Хакен и Аппель стали свидетелями, что компьютер не только выполняет вычисления, но и делает нечто большее, а именно привносит в работу новые идеи. Хакен и Аппель вспоминают поворотный пункт в их исследовании: «Когда мы дошли до этого пункта, программа начала удивлять нас. Первое время мы проверяли от руки все ее вычисления и могли всегда предсказать, как она будет работать в любой ситуации; но теперь она неожиданно повела себя, как шахматная машина. Программа стала выдавать составные стратегии, используя всевозможные трюки, которым она «научилась», и часто предлагаемые программой подходы оказывались более умными, чем те, которые могли предложить мы сами. Так программа стала учить нас, как действовать, чего мы от нее никак не ожидали. В каком-то смысле программа превзошла нас, ее создателей, не только в механической, но и в «интеллектуальной» части работы».

В июне 1976 года, затратив 1200 часов машинного времени, Хакен и Аппель заявили во всеуслышание, что им удалось проанализировать все 1482 карты и для раскрашивания ни одной из них не требуется более четырех красок. Проблема четырех красок Гатри была наконец решена. Следует особенно подчеркнуть, что решение проблемы четырех красок стало первым математическим доказательством, в котором роль компьютера не сводилась к ускорению вычислений, — компьютер привнес в решение проблемы нечто гораздо большее: его роль была столь значительной, что без компьютера получить доказательство было бы невозможно. Решение проблемы четырех красок с помощью компьютера было выдающимся достижением, но в то же время оно вызвало у математического сообщества чувство тревоги, так как проверка доказательства в традиционном смысле не представлялась возможной.

Прежде, чем опубликовать решение Хакена и Аппеля на страницах «Illinois Journal of Mathematics», редакторам было необходимо подвергнуть его тщательному рецензированию в каком-то не известном ранее смысле. Традиционное рецензирование было невозможно, поэтому было решено ввести программу Хакена и Аппеля в независимый компьютер с тем, чтобы убедиться, что результат останется тем же.

Такое нестандартное рецензирование привело в ярость некоторых математиков, утверждавших, будто компьютерная поверка неадекватна, так как не дает гарантии от внезапного отказа в недрах компьютера, который может стать причиной сбоя в логике. Х.П.Ф. Суиннертон-Дайер высказал следующее замечание по поводу компьютерных доказательств: «Когда теорема доказана с помощью компьютера, невозможно изложить доказательство в соответствии с традиционным критерием — так, чтобы достаточно терпеливый читатель смог шаг за шагом повторить доказательство и убедиться в том, что оно верно. Даже если бы кто-нибудь взял на себя труд распечатать все программы и все данные, использованные в доказательстве, нельзя быть уверенным в абсолютно правильной работе компьютера. Кроме того, у любого современного компьютера по каким-то неясным причинам могут быть слабые места как в программном обеспечении, так и в электронном оборудовании, которые могут приводить к сбоям так редко, что остаются необнаруженными на протяжении нескольких лет, и поэтому в работе каждого компьютера могут быть незамеченные ошибки».

До какой-то степени поведение математического сообщества, предпочитавшего

избегать компьютеров вместо того, чтобы их использовать, можно рассматривать как своего рода паранойю. Джозеф Келлер как-то заметил, что в его университете (Стэнфорде) математический факультет имел меньше компьютеров, чем любой другой факультет, в том числе факультет французской литературы. Те математики, которые отказались признать работу Хакена и Аппеля, не могли отрицать, что все математики соглашались принимать традиционные доказательства, даже если они сами не проверяли их. В случае доказательства Великой теоремы Ферма, представленного Уайлсом, менее 10 % специалистов по теории чисел полностью понимали его рассуждения, но все 100 % сочли, что доказательство правильное. Те, кто не смог до конца понять все тонкости доказательства, приняли его потому, что доказательство признали другие—те, кто все понял, шаг за шагом проследил весь ход доказательства и проверил каждую деталь.

Еще более ярким примером может служить так называемое доказательство классификации конечных простых групп, состоящее из 500 отдельных работ, написанных более чем сотней математиков. Говорят, что полностью разобрался в этом доказательстве (общим объемом в 15000 страниц) один-единственный человек на свете — скончавшийся в 1992 году Дэниэл Горенстейн. Тем не менее, математическое сообщество в целом могло быть спокойным: каждый фрагмент доказательства был изучен группой специалистов, и каждая строка из 15000 страниц была десятки раз проверена и перепроверена. Что же касается проблемы четырех красок, то с ней дело обстояло иначе: она никем не была и не будет полностью проверена.

За двадцать лет, прошедших с тех пор, как Хакен и Аппель сообщили о доказательстве теоремы о четырех красках, компьютеры неоднократно использовались для решения других, менее известных, но столь же важных проблем. В математике — области, не ведавшей ранее вмешательства столь современной технологии, как компьютеры, — все больше и больше специалистов неохотно осваивали использование кремниевой логики и разделяли мнение Вольфганга Хакена: «Всякий, в любом месте доказательства, может полностью вникнуть в детали и проверить их. То, что компьютер может за несколько часов «просмотреть» столько деталей, сколько человек не сможет просмотреть за всю свою жизнь, не меняет в принципе представление о математическом доказательстве. Меняется не теория, а практика математического доказательства».

Лишь совсем недавно математики наделили компьютеры еще большей властью, используя так называемые генетические алгоритмы. Это компьютерные программы, общая структура которых составлена математиком, но тонкие детали определяются самим компьютером. Некоторые направления, или «линии», в программе обладают способностью мутировать и эволюционировать наподобие индивидуальных генов в органической ДНК. Отправляясь от исходной материнской программы, компьютер может порождать сотни дочерних программ, слегка отличающихся из-за введенных компьютером случайных мутаций. Дочерние программы используются в попытках решения проблемы. Большинство программ бесславно не срабатывают, а та, которой удается дальше других продвинуться к желанному результату, используется в качестве материнской программы, порождающей новые поколение дочерних программ. Выживание наиболее приспособленного интерпретируется как выделение той из дочерних программ, которая позволяет особенно близко подойти к решению проблемы. Математики надеются, что, повторяя этот процесс, программа без вмешательства извне приблизится к решению проблемы. В некоторых случаях такой подход оказался весьма успешным.

Специалист в области «computer science» Эдвард Френкин даже заявил, что когда-нибудь компьютер найдет решение какой-нибудь важной проблемы без помощи математиков. Десять лет назад Френкин учредил премию Лейбница размером в 100000 долларов. Премия будет присуждена первой компьютерной программе, способной сформулировать и доказать теорему, которая окажет «глубокое влияние на развитие математики». Будет ли когда-нибудь присуждена премия Лейбница — вопрос спорный, но одно можно сказать со всей определенностью: компьютерной программе всегда будет

недоставать прозрачности традиционных доказательств, и в сравнении с ними она будет проигрывать, уступая им в глубине. Математическое доказательство должно не только давать ответ на поставленный вопрос, но и способствовать пониманию, почему ответ именно таков, каков он есть, и в чем именно состоит его суть. Задавая вопрос на входе в черный ящик и получая ответ на выходе из него, мы увеличиваем знание, но не понимание. Из представленного Уайлсом доказательства Великой теоремы Ферма мы узнали, что уравнение Ферма не допускает решений в целых числах потому, что любое такое решение привело бы к противоречию с гипотезой Таниямы-Шимуры. Уайлс не только ответил на вызов Ферма, но и обосновал свой ответ, указав, что он должен быть именно таким, а не другим, чтобы не нарушить фундаментальное соответствие между эллиптическими кривыми и модулярными формами.

Математик Рональд Грэхем описывает недостаточную глубину компьютерных доказательств на примере одной из великих не доказанных по сей день гипотез — гипотезы Римана: «Я был бы весьма и весьма разочарован, если бы можно было подключиться к компьютеру, спросить у него, верна ли гипотеза Римана, и получить в ответ: "Да, верна, но Вы не сможете понять доказательство"». Математик Филип Дэвис, похожим образом отреагировал на решение проблемы четырех красок: «Моей первой реакцией было: "Потрясающе! Как им удалось решить эту проблему?". Я ожидал какой-то блестящей новой идеи, красота которой перевернула бы всю мою жизнь. Но когда я услышал в ответ: "Они решили проблему, перебрав тысячи случаев и пропустив все варианты один за другим через компьютер", — меня охватило глубочайшее уныние. Я подумал: "Значит, все сводилось к простому перебору, и проблема четырех красок вовсе не заслуживала названия хорошей проблемы"».

Заслуженная награда

Предложенное Уайлсом доказательство Великой теоремы Ферма опирается на доказательство гипотезы, родившейся в 50-е годы XX века. Его рассуждения используют ряд математических методов, созданных за последнее десятилетие, в том числе им самим. Доказательство Уайлса — шедевр современной математики, что неизбежно приводит к заключению: оно не совпадает с доказательством Ферма. Ферма написал на полях своего экземпляра «Арифметики» Диофанта, что недостаток места не позволяет ему привести доказательство. Доказательство Уайлса занимает 100 страниц убористого математического текста и заведомо удовлетворяет критерию Ферма (это доказательство невозможно воспроизвести на полях «Арифметики»), но Ферма не были известны ни модулярные формы, ни гипотеза Таниямы-Шимуры, ни группы Галуа, ни метод Колывагина-Флаха.

Но если у Ферма не было доказательства Уайлса, то что у него было? Математики разделились на два лагеря. Твердолобые скептики склоняются к мнению, что Великая теорема Ферма была результатом редкого момента слабости математического гения XVII века. Они утверждают, что хотя Ферма и написал на полях «Арифметики» Диофанта: «Я нашел поистине удивительное доказательство», — в действительности он нашел доказательство, содержавшее ошибку. Вполне возможно, что доказательство Ферма строилось примерно так же, как доказательство Коши и Ламе.

Другие математики, назовем их романтическими оптимистами, убеждены в том, что Ферма мог найти какое-то гениальное доказательство. Каким бы ни было это гипотетическое доказательство, оно должно было быть основано на методах XVII века и использовать аргумент настолько тонкий, что он ускользнул впоследствии от всех — от Эйлера до Уайлса. Несмотря на публикацию доказательства Уайлса, существует много математиков, которые уверены в том, что им удастся добиться широкого признания и славы, открыв первоначальное доказательство Ферма.

Хотя для решения загадки XVII века Уайлсу пришлось прибегнуть к методам XX века, тем не менее найденное им доказательство Великой теоремы Ферма удовлетворяло всем

правилам, установленным комиссией Вольфскеля. 27 июня 1997 года Эндрю Уайлс получил премию Вольфскеля в размере 50000 долларов. И снова Ферма и Уайлс попали на первые полосы газетных изданий всего мира. Великая теорема Ферма была официально признана доказанной.

Какая проблема теперь привлечет внимание Уайлса? В течение семи лет он работал над доказательством Великой теоремы Ферма в обстановке полной секретности. Неудивительно, что он отказывается отвечать на вопросы о том, над чем работает сейчас, но над чем бы Уайлс ни работал, не подлежит сомнению, что новая проблема никогда не захватит его с такой полнотой, как Великая теорема Ферма. «Ни одна другая проблема не будет означать для меня так много. Великая теорема Ферма была моей детской мечтой. Заменить ее не сможет ничто. Я доказал ее. Уверен, что попытаюсь решить какие-то другие проблемы. Некоторые из проблем очень трудны, и если мне удастся решить какую-нибудь из них, то это, несомненно, снова даст мне ощущение достижения. Но нет ни одной проблемы в математике, которая могла бы захватить меня так, как захватила Великая теорема Ферма.

Мне выпало счастье осуществить в моей взрослой жизни то, что было мечтой моего детства. Я знаю, что это редкая удача, но если во взрослом состоянии вам представляется возможность заниматься чем-то таким, что значит для вас так много, то это занятие служит для вас наградой более высокой, чем что-либо еще. Доказав Великую теорему Ферма, я не мог не ощутить чувство потери, но в то же время меня охватило чувство бескрайней свободы. На протяжении восьми лет я был настолько поглощен ее доказательством, что не мог думать ни о чем другом. Я думал о теореме Ферма все время — с утра до ночи. Для размышлений об одном и том же — срок очень долгий. Теперь эта одиссея подошла к концу. Мой разум обрел покой».

Приложения

Приложение 1. Доказательство теоремы Пифагора

Цель доказательства — убедиться в том, что теорема Пифагора верна для всех прямоугольных треугольников. Треугольник, изображенный на рисунке слева, может быть любым прямоугольным треугольником, так как длины его сторон не указаны, а обозначены буквами x, y и z. Справа из четырех одинаковых прямоугольных треугольников и наклоненного квадрата составлен квадрат больших размеров. Площадь большего квадрата — ключ к доказательству.

Площадь большого квадрата можно вычислить двумя способами.

1-й способ. Измеряем площадь большого квадрата как единой фигуры. Длина каждой стороны равна $x + y$. Следовательно, площадь большого квадрата равна $(x + y)^2$.

2-й способ. Измеряем площадь каждого элемента большого квадрата. Площадь каждого треугольника равна $xy/2$. Площадь наклонного квадрата равна z^2. Следовательно, площадь большого квадрата равна 4 × (площадь каждого треугольника) + (площадь наклонного квадрата) = $4 \cdot xy/2 + z^2$. 1-й и 2-й способы приводят к двум различным выражениям. Оба выражения должны быть равны, так как они представляют различные записи одной и той же площади. Следовательно,

$$\mathbf{(x + y)^2 = 4 \cdot xy/2 + z^2}.$$

Раскроем скобки и упростим полученные выражения:

$$\mathbf{x^2 + 2xy + y^2 = 2xy + z^2}.$$

Члены $2xy$, стоящие в левой и правой частях равенства, взаимно уничтожаются, и мы получаем

$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$.

Это и есть теорема Пифагора!

Приведенное доказательство остается в силе для любых прямоугольных треугольников. Длины сторон треугольника в нашем доказательстве обозначены буквами *x, y* и *z* , которые могут быть длинами сторон любого прямоугольного треугольника.

Приложение 2. Доказательство Евклида иррациональности числа √2

Цель Евклида состояла в доказательстве того, что число √2 не представимо в виде дроби. Поскольку Евклид использовал доказательство от противного, первый шаг состоял в предположении, что верно противоположное утверждение, т. е. что число √2 представимо в виде некоторой неизвестной дроби. Запишем эту дробь в виде *p* /*q* , где *p* и *q* — два целых числа.

Прежде чем приступать к самому доказательству, необходимо напомнить некоторые основные свойства дробей и четных чисел.

1) Если взять любое число и умножить его на 2, то произведение должно быть четным. По существу, это определение четного числа.

2) Если квадрат некоторого числа четен, то и само число должно быть четным.

3) Наконец, дроби можно сокращать: 16/24 это то же самое число, что и 8/12. Чтобы убедиться в этом разделите числитель и знаменатель дроби 16/24 на общий множитель 2. Кроме того, число 8/12 это же самое, что и 4/6, а 4/6 это же самое, что и 2/3. Дробь 2/3 не подлежит дальнейшему сокращению, так как 2 и 3 не имеют общих множителей. Дробь невозможно сокращать до бесконечности.

Напомним, что по мнению Евклида число √2 не представимо в виде дроби. Но поскольку Евклид использовал доказательство от противного, он начал с предположения, что дробь *p* /*q* , равная числу √2, существует, а затем исследовал, к каким последствиям приводит такое предположение:

√2 = *p* /*q* .

Возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$2 = p^2/q^2$.

После несложного преобразования запишем это равенство в виде

$\mathbf{2q^2 = p^2}$.

Из 1) мы знаем, что число p^2 должно быть четным. Кроме того, из 2) нам известно, что число *p* также должно быть четным. Но если *p* четно, то, как следует из 1), его можно записать в виде 2*m* , где *m* — некоторое другое целое число. Подставляя *p* = 2*m* в равенство для p^2, получаем

$\mathbf{2q^2 = (2m)^2 = 4m^2}$.

Сокращаем правую и левую части равенства на 2:

$\mathbf{q^2 = 2m^2}$.

Рассуждая так же, как прежде, заключаем, что число q^2 должно быть четным. Значит, и само число *q* должно быть четным. Но если это так, то *q* можно записать в виде *q* = 2*n* , где *n* — некоторое другое целое число. Возвращаясь к исходной записи числа √2, получаем:

√2 = p/q = 2m/2n .

Дробь 2*m* /2*n* можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 2:

√2 = m/n .

Мы получаем дробь *m* /*n* , которая проще, чем *p* /*q* (имеет меньший числитель и знаменатель). Теперь мы как бы снова оказались находимся на исходной позиции, и, проделав с дробью *m* /*n* все, что мы проделали с дробью *p* /*qn* , получим в результате еще более простую дробь, например, *g* /*h* . Проделав с этой дробью тоже самое, приведем ее к

еще более простой дроби t /f , и т. д. Аналогичную процедуру можно проделывать бесконечное число раз. Но из 3) мы знаем, что дробь невозможно упрощать бесконечно — всегда существует простейшая дробь. Но наша исходная гипотетическая дробь p /q , насколько можно судить, не подчиняется этому правилу. Следовательно мы получили противоречие. Итак, мы можем утверждать, что число √2 не представимо в виде дроби, а это означает оно является иррациональным числом.

Приложение 3. Загадка о возрасте Диофанта

Обозначим продолжительность жизни Диофанта через L . Из загадки нам известно, как протекала жизнь Диофанта: 1/6 жизни, т. е. L /6, пришлась на его детство; L /12 — на юношеские годы; L /7 прошла прежде, чем он женился; через 5 лет у него родился сын; сын прожил L /2 жизни отца; 4 года Диофант оплакивал смерть сына прежде, чем умер.

Таким образом, продолжительность жизни Диофанта L можно записать в виде суммы:

L = L/6 + L/12 + L/7 + 5 + L/2 + 4 .

Отсюда L = 84. Итак, Диофант умер в возрасте 84 лет.

Приложение 4. Задача Баше о наборе гирь

Чтобы взвесить любое целое число килограммов от 1 до 40, по мнению большинства людей необходимо иметь 6 гирь: 1, 2, 4, 8, 16 и 32 кг. Действительно, такой набор гирь позволяет взвесить любой груз от 1 до 40 кг, помещая его на одну чашу весов и ставя на другую следующие комбинации гирь:

1 кг = 1, 2 кг = 2, 3 кг = 2 + 1, 4 кг = 4, …, 5 кг = 4 + 1, …, 40 кг = 32 + 8 .

Но грузы можно взвешивать и по-другому, а именно: располагая гири на обеих чашах весов, т. е. не только на чаше, свободной в начале взвешивания, но и на чаше с грузом. При таком способе взвешивания Баше понадобились только 4 гири: 1, 3, 9 и 27 кг. Гиря, помещаемая на одну чашу с грузом, как бы приобретает отрицательный вес. Способ Баше позволяет взвесить любой груз от 1 до 40 кг, ставя гири на обе чаши весов в следующих комбинациях:

1 кг = 1, 2 кг = 3–1, 3 кг = 3, 4 кг = 3 + 1, 5 кг = 9–3 — 1, …, 40 кг = 27 + 9 + 3 + 1 .

Приложение 5. Доказательство Евклида существования бесконечного числа пифагоровых троек

Пифагоровой тройкой называется такой набор из трех целых чисел, что сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего числа. Евклид сумел доказать, что существует бесконечно много таких пифагоровых троек.

Предложенное Евклидом доказательство начинается с наблюдения: разность квадратов последовательных целых чисел всегда равна какому-нибудь нечетному числу:

Прибавив каждое из бесконечного множества нечетных чисел к соответствующему квадрату, мы получим другой квадрат. Некоторые нечетные числа, составляющие часть всех нечетных чисел, сами являются квадратами (например, 32, 52, 72 и т. д.). Следовательно, существует бесконечно много нечетных квадратов, которые можно прибавить к квадрату и получить другой квадрат. Иначе говоря, существует бесконечно много пифагоровых троек.

Приложение 6. Доказательство гипотезы о трех точках

Гипотеза о трех точках утверждает, что невозможно построить точную диаграмму так, чтобы на каждой прямой было по крайней мере три точки. Хотя это доказательство требует минимальных познаний в математике, оно опирается на некоторую геометрическую

«гимнастику», и поэтому следует тщательно продумать каждый его шаг.

Начнем с произвольно расположенных точек. Проведем через каждую точку прямые, соединяющие ее со всеми остальными точками. Затем для каждой точки измерим расстояние, отделяющие ее от ближайшей прямой, и найдем ту из точек, которая ближе, чем все остальные, находится от некоторой прямой.

На рисунке внизу изображена такая точка D , которую от прямой L отделяет самое короткое расстояние. На рисунке это расстояние показано штриховой линией. Оно короче, чем расстояние, отделяющее любую другую точку от ближайшей к ней линии. Теперь можно показать, что на прямой L всегда лежат только две точки и что, следовательно, гипотеза верна, т. е. невозможно построить точечную диаграмму так, чтобы на каждой прямой лежали три точки.

Чтобы показать, что на прямой L должны лежать две точки, рассмотрим, что случилось бы, если бы на ней оказалось третья точка. Если бы третья точка D_A лежала на прямой L вне двух точек, через которые она проходит, то расстояние, показанное пунктирной линией, было бы короче расстояния, показанного штриховой линией. Между тем это расстояние по предположению, наименьшее из всех кратчайших расстояний, отделяющих точку диаграммы от линии. Следовательно, точка D_A существовать не может.

Аналогично, если бы третья точка D_B оказалась на прямой между двумя точками, то расстояние, показанное пунктиром, оказалось бы короче расстояния, показанного штрихом, по предположению наименьшего из кратчайших расстояний от точки диаграммы до прямой.

Следовательно, для каждой конфигурации всегда существует по крайней мере эта прямая, которой принадлежат только две точки диаграммы, и гипотеза верна.

Приложение 7. Пример неправильного доказательства

Приведем классический пример того, как легко, начав с очень простого утверждения и сделав всего лишь несколько, казалось бы, прямых и вполне логичных шагов, показать, 2=1.

Начнем с невинного утверждения о том, что

$\mathbf{a = b}$.

Умножив обе части равенства на a , получим:

$\mathbf{a^2 = ab}$.

Добавив к обеим частям равенства по $a^2–2ab$:

$\mathbf{a^2 + a^2 – 2ab = ab + a^2 – 2ab}$.

Это равенство можно упростить:

$\mathbf{2(a^2 — ab) = a^2 — ab}$.

Наконец, сокращая это выражение на a^2-ab получаем требуемое равенство 2=1.

Исходное утверждение казалось совершенно безвредным (и на самом деле оно не таит в себе ничего плохого), но, производя шаг за шагом преобразования равенства $a=b$, мы допустили маленькую, но роковую ошибку, которая и привела нас к противоречию. Эту ошибку мы допустили, производя последнее преобразование, когда разделили обе части равенства на a^2-ab . Из исходного утверждения нам известно, что $a=b$. Следовательно, деление на a^2-ab эквивалентно делению на нуль.

Такого рода тонкая ошибка типична для просчетов, допущенных многими

соискателями премии Вольфскеля.

Приложение 8. Аксиомы арифметики

Величественное здание арифметики опирается на следующие аксиомы.

1. Для любых чисел m и n

$$m + n = n + m \text{ и } mn = nm.$$

2. Для любых чисел m, n и k

$$(m + n) + k = m + (n + k) \text{ и } (mn)k = m(nk).$$

3. Для любых чисел m, n и k

$$m(n + k) = mn + mk.$$

4. Существует число 0, такое, что для любого числа n

$$n + 0 = n.$$

5. Существует число 1, такое, что для любого числа n

$$n \cdot 1 = n.$$

6. Для любого числа n существует другое число k, такое, что

$$n + k = 0.$$

7. Для любых чисел m, n и k

если *k* ≠ 0 и *kn* = *km*, то *m* = *n*.

Исходя из этих аксиом, можно доказать другие правила арифметики. Например, используя только приведенные выше аксиомы и не прибегая ни к каким другим допущениям, мы можем строго доказать правило, которое кажется очевидным и заключается в следующем:

если $m + k = n + k$, то $m = n$.

Прежде всего, пусть

$m + k = n + k$.

Аксиома 6 гарантирует, что существует число l, такое, что $k + l = 0$, поэтому

$(m + k) + l = (n + k) + l$.

Но по аксиоме 2

$m + (k + l) = n + (k + l)$.

Принимая во внимание, что $k + l = 0$, получаем:

$m + 0 = n + 0$.

Аксиома 4 позволяет нам утверждать то, что требовалось доказать, а именно:

$m = n$.

Приложение 9. Теория игр и труэль

Однажды утром м-р Блэк, м-р Грей и м-р Уайт вздумали решить конфликт труэлью на

пистолетах. Стрелять условились до тех пор, пока в живых не останется только один из участников. М-р Блэк стрелял хуже всех. В цель он попадал в среднем лишь один раз из трех. М-р Уайт стрелял лучше всех — без промаха. Чтобы уравнять шансы участников труэли, м-ру Блэку разрешено стрелять первым, за ним должен стрелять м-р Грей (если он останется в живых), затем мог стрелять м-р Уайт (если он еще будет жив). Далее все начиналось снова, и так до тех пор, пока в живых не останется только один из участников труэли. Вопрос: в кого должен выстрелить м-р Блэк, производя свой первый выстрел?

Проанализируем выбор цели, который предстоит сделать мистеру Блэку. Во-первых, если мистер Блэк стреляет в мистера Грея и попадает в цель, то право следующего выстрела перейдет к мистеру Уайту. У мистера Уайта останется единственный противник — мистер Блэк, а поскольку мистер Уайт стреляет без промаха, то мистер Блэк может считать себя покойником.

Для мистера Блэка лучше, если он прицелится в мистера Уайта. Если мистер Блэк попадает в цель, то право следующего выстрела перейдет к мистеру Грею. Мистер Грей попадает в цель только в двух случаях из трех, поэтому у мистера Блэка есть шанс остаться в живых, произвести ответный выстрел в мистера Грея и, возможно, выиграть труэль.

На первый взгляд кажется, что мистеру Блэку следует остановить свой выбор на втором варианте труэли. Однако существует третий, еще лучший выбор. Мистер Блэк может выстрелить в воздух. Право следующего выстрела переходит к мистеру Грею, который стреляет в мистера Уайта как более опасного оппонента. Если мистер Уайт остается в живых, то он стреляет в мистера Грея как более опасного противника. Стреляя в воздух, мистер Блэк предоставляет мистеру Грею исключить мистера Уайта.

Третий вариант — наилучшая стратегия для мистера Блэка. Мистер Грей или мистер Уайт в конечном счете погибает, после чего мистер Блэк стреляет в того из них, кто остается жив. Выстрелом в воздух мистер Блэк изменяет ситуацию: вместо первого выстрела в труэли он производит первый выстрел в дуэли.

Приложение 10. Пример доказательства по индукции

В математике важно иметь точные формулы, позволяющие вычислять сумму различных последовательностей чисел. В данном случае мы хотим вывести формулу, дающую сумму первых n натуральных чисел.

Например, «сумма» всего лишь одного первого натурального числа 1 равна 1; сумма двух первых натуральных чисел 1+2 равна 3, сумма первых трех натуральных чисел 1+2+3 равна 6, сумма первых четырех натуральных чисел 1+2+3+4 равна 10 и т. д.

Возможно, что требуемая формула имеет вид

Σ(n) = ½·n (n + 1).

Иначе говоря, если требуется найти сумму n первых натуральных чисел, то нужно просто подставить число n в приведенную выше формулу и получить ответ.

Доказательство по индукции позволяет убедиться в том, что эта формула дает правильный ответ при любом натуральном числе от 1 до бесконечности. Первый шаг состоит в том, чтобы показать, что формула работает в первом случае, при n =1. В этом нетрудно убедиться непосредственно, так как мы знаем, что сумма, состоящая из одного-единственного слагаемого, числа 1, равна 1. Подставляя n =1 в нашу формулу убеждаемся в том, что она дает правильный результат:

Σ(1) = ½·1·(1 + 1).

Следующий шаг в доказательстве по индукции заключается в том, чтобы показать, что если формула верна при каком-то значении n , то она должна быть верна и при n +1. Если

Σ(n) = ½·n (n + 1).

то

Σ(n + 1) = Σ(n) + (n + 1) = ½·n (n + 1) + (n + 1).

После преобразования членов в правой части получаем

Σ(n + 1) = ½·(n + 1)[(n + 1) + 1].

Важно отметить, что последняя формула «устроена» точно так же, как исходная формула с той лишь разницей, что там, где в исходной формуле стоит n , в новой формуле стоит n +1. Иначе говоря, если формула верна для n , то она должна быть верна и для n +1. Доказательство по индукции завершено.

Указания для дальнейшего чтения

При создании книги я опирался на многие книги и статьи. Помимо тех источников, которыми я пользовался при написании каждой главы, мною указаны материалы, которые могут представить интерес как для обычного читателя, так и для специалиста. В тех случаях, когда заголовок источника не позволяет судить о том, какое отношение данный источник имеет к теме книги, я счел возможным пояснить содержание источника одной или двумя фразами.

ГЛАВА 1

1 *Bell E. T.* The Last Problem. — Mathematical Association of America, 1990.

История классического периода поисков доказательства Великой теоремы Ферма в популярном изложении.

2 *Ralph L.* Pythagoras — A Short Account of His Life and Philosophy. — Krikos, 1961.

3 *German P.* Pythagoras — A Life. — Routledge and Paul Kegan, 1979.

4 *Heath Th.* A History of Greek Mathematics. Vol. 1, 2. — Dover, 1981.

5 *Gardner M.* Mathematical Magic Show. — Knopf, 1977.

Сборник математических задач-головоломок по материалам раздела «Математические игры» журнала «Scientific American».

6 *Stollum H.-H.* River meandering as a self-organization process // Science, 1996. Vol. 271, P. 1710–1713.

ГЛАВА 2

1 *Mahoney M.* The Mathematical Career of Pierre de Fermat. — Princeton University Press, 1994.

Подробное исследование, посвященное жизни и деятельности Пьера де Ферма.

2 *Huffman P.* Archimedes' Revenge. — Penguin, 1988.

Увлекательные рассказы о радостях и горестях математики.

ГЛАВА 3

1 *Bell E. T.* Men of Mathematics. — Simon and Schuster, 1937.

Биографии величайших гениев в истории математики: Эйлера, Ферма, Гаусса, Коши и Куммера.

2 *Lloyd M., Dybas H. S.* The periodical cicada problem // Evolution, 1966. Vol. 20, P. 466–505.

3 *Osen L. M.* Women in Mathematics. — MIT Press, 1994.

В основном, это нематематический текст с биографиями многих выдающихся математиков-женщин, в том числе Софи Жермен.

4 *Peri T.* Math Equals: Biographies of Women Mathematicians + Related Activities. — Addison-Wesley, 1978.

5 *Mozans H.J.* Women in Science. — D.Appleton and Co, 1913.

6 *Dahan D. A.* Sophie Germain // Scientific American, December 1991.

Краткая статья о жизни и трудах Софи Жермен.
7 *Edwards H. M.* Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. — Springer, 1977.
Математическое обсуждение Великой теоремы Ферма, включающее подробное изложение некоторых ранних попыток доказательства.
8 *Burton D.* Elementary Number Theory. — Allyn & Bacon, 1980.
Различные сообщения О. Коши Парижской академии наук. In: C. R. Acad. Sci., Paris, 1847. Vol. 24, P. 407–416, 469–483.
9 *Lame G.* Note au sujet de la demonstration du theoreme de Fermat // C. R. Acad. Sci., Paris, 1847. Vol. 24, P. 352.
10 *Kummer E. E.* Extrait d'une lettre de M. Kummer a M. Liouville // J. Math. Pures et Appl., 1847. Vol. 12, P. 136. Также см. *Kummer E. E.* Collected Papers. Vol. 1 (Ed. by A. Weil) — Springer, 1975.
11 *Lines M. E.* A Number for Your Thoughts. — Adam Hilger, 1986.
Факты и измышления о числах от Евклида до новейших компьютеров, в том числе чуть более подробное изложение гипотезы о точках.

ГЛАВА 4

1 *Davis P. J., Chinn W. O.* 3,1415 and All That. — Birkhäuser, 1985.
Истории о математике и математиках, в том числе глава о Пауле Вольфскеле.
2 *Wells D.* The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. — Penguin, 1986.
3 *Wells D.* The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Puzzles. — Penguin, 1982.
4 *Loyd S. Ju.* Sam Loyd and his Puzzles. — Barse and Co, 1928.
5 *Loyd S.* Mathematical Puzzles of Sam Loyd. Ed. By Martin Gardner. — Dover, 1959.
6 *Northropp E. P.* Riddles in Mathematics. — Van Nostrand, 1944.
7 *Lodge D.* The Picturgoers. — Penguin, 1993.
8 *Ribenboim P.* 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. — Springer, 1980.
Обзор различных попыток доказательства Великой теоремы Ферма, написанный до работ Эндрю Уайлса. Рассчитан на аспирантов-математиков.
9 *Devlin K.* Mathematics: The Science of Patterns. — Scientific American Library, 1994.
Великолепно иллюстрированная книга, поясняющая математические понятия на удивительно наглядных образах.
10 *Devlin K.* Mathematics: The New Golden Age. — Penguin, 1990.
Общедоступный подробный обзор современной математики, содержащий помимо прочего обсуждение аксиом математики.
11 *Stewart I.* The Concepts of Modern Mathematics. — Penguin, 1995.
12 *Russell B., Whitehead A. N.* Principia Mathematica. 3 Vols. — Cambridge University Press, 1910–1913.
13 *Kreisel G.* Kurt Gödel. In: Biographical Memoirs of the Fellows of the Royal Society, 1980.
14 *Hardy G. H.* A Mathematician's Apology. — Cambridge University Press, 1940.
Один из наиболее выдающихся математиков XX века излагает свою точку зрения на мотивы своей профессиональной деятельности и деятельности других математиков.
15 *Hodges A.* Alan Turing: The Enigma of Intelligence. — Unwin Paperbacks, 1983.
Очерк жизни Алана Тьюринга, рассказывающий о его жизни; математическом творчестве и участии в раскрытии кода «Энигма».

ГЛАВА 5

1 *Shimura G.* Yutaka Taniyama and his time. — Bulletin of the London Mathematical Society, 1989. Vol. 21, P. 186–196.

Очерк жизни и творчества Ютаки Таниямы, написанный с весьма личной точки зрения.
2 *Frey G.* Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations // Ann. Univ. Sarav. Math. Ser., 1986. Vol. 1, P. 1–40.
Статья, сыгравшая решающую роль, в которой Фрей высказал предположение о существовании связи между гипотезой Таниямы-Шимуры и Великой теоремы Ферма.

ГЛАВА 6

1 *Rothmans T.* Genius and Biographers: the Fictionalization of Evariste Galois // Amer. Math. Monthly, 1982. Vol. 89, P. 84–106.
В статье приведен подробный перечень источников, на которые опираются биографы Галуа, и обсуждается достоверность различных интерпретаций.
2 *Depny P.* La vie d'Evariste Galois // Annales Scientifiques de 1'Ecole Normale Superieure, 1986. Vol. 13, P. 197–266.
3 *Dumas A.* Mes Memoirs. — Editions Gallimard, 1967.
4 *Van der Poorten A.* Notes on Fermat's Last Theorem. — Wiley, 1996.
Техническое описание доказательства Уайлса, рассчитанное на студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей.

ГЛАВА 7

1 *Gelbart S.* An elementary introduction to the Langlands programme // Bulletin of the American Mathematical Monthly, 1984. Vol. 10, P. 177–219.
Техническое изложение программы Ленглендса, рассчитанное на профессиональных математиков.
2 *Wiles A.* Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 443–551.
Эта статья содержит основную часть предложенного Уайлсом доказательства гипотезы Таниямы-Шимуры и Великой теоремы Ферма.
3 *Taylor R., Wiles A.* Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras // Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 553–572.
В этой статье приводится описание тех математических методов, которые использовались для восполнения пробелов в варианте доказательства Уайлса 1993 года.

ГЛАВА 8

1 *Stewart I.* How to succeed in stacking // New Scientist, 13 July 1991, P. 29–32.
2 *Morgan J.* The death of proof // Scientific American, October 1993, P. 74–82.
3 *Appel K., Haken W.* The solution of the four-color-map problem // Scientific American, October 1977. P. 108–121.
4 *Saaty T. L., Kainen P. C.* The Four-Color Problem: Assaults and Conquest. — McGraw-Hill, 1977.
5 *Davis O. J., Hersh R.* The Mathematical Experience. — Penguin, 1990.